КУРСЪ
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ
СЪ
ПРАКТИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ.

ДЛЯ ГОРОДСКИХЪ УЧИЛИЩЪ

ПО ПРОГРАММѢ ВИННИЦКАГО СЪѢЗДА УЧИТЕЛЕЙ

СОСТАВИЛЪ

М. БОРЫШКЕВИЧЪ.

ИЗДАНІЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ.

КІЕВЪ.

Типографія И. Крыжановскаго и В. Авдюшенко, уг. Соф. ул., д. № 1

1893.

«Наглядность есть фундаментъ всѣхъ знаній».

(Песталоцци.)

«Самая большая и главнѣйшая часть развитія должна совершиться посредствомъ самодѣятельности ученика».

(Диттесъ.)

Нѣтъ сомнѣнія, что геометрія есть одна изъ полезнѣйшихъ наукъ. Истины, предлагаемыя ею, даютъ средство къ рѣшенію множества практическихъ вопросовъ, встрѣчающихся въ ремеслахъ, искусствахъ и общежитіи. Но существующіе у насъ, въ педагогической литературѣ, учебники элементарной геометріи, которые даются въ руки учащимся, обыкновенно наполнены рядомъ аксіомъ, теоремъ и другихъ такихъ предложеній, изъ которыхъ весьма многія, нисколько не привлекая вниманія учащагося, на первыхъ же порахъ утомляютъ и отвращаютъ его отъ преподаваемаго предмета.

При составленіи настоящаго учебника я старался выполнить ту мысль Винницкаго съѣзда преподавателей математики и черченія, что преподаваніе геометріи въ городскихъ училищахъ должно преслѣдовать двѣ цѣли: 1) содѣйствовать умственному развитію учащихся и 2) сообщить побольше свѣдѣній, полезныхъ своими практическими приложеніями.

Хотя, согласно опредѣленію того же съѣзда учителей, черченіе въ I классѣ должно преподаваться такъ, чтобы преподаватель геометріи могъ воспользоваться работою учителя черченія, какъ готовымъ матеріаломъ, и не имѣлъ бы по крайней мѣрѣ надобности въ ознакомленіи учащихся съ терминологіей, съ самыми наглядными свойствами фигуръ и ихъ частей, а черченіе во 2 классѣ должно служить подспорьемъ преподаванію геометріи, однако полагая, что преподаватель геометріи долженъ при каждомъ урокѣ пре[illegible]рительно повторить съ учащимися соотвѣтственную терминологію, я с[illegible] лишнимъ соединить то, что относится къ курсу геометріи, и что должно быть пройдено на урокахъ черченія, съ курсомъ геометріи,—дабы учебникъ имѣлъ надлежащую полноту.

Хотя нѣкоторыя части настоящаго учебника (преимущественно относящіяся къ урокамъ черченія) имѣютъ—ради краткости—форму изло-
женія догматичическую, однако, при преподаваніи элементарной геоме-

ріи, необходимо удовлетворять тремъ главнымъ педагогическимъ принципамъ: а) наглядности, б) самодѣятельности и в) интересу. Польза нагляднаго преподаванія геометріи вытекаетъ изъ того, что извѣстныя геометрическія *истины постигаются* учащимися посредствомъ внѣшнихъ чувствъ и этимъ путемъ легче усваиваются. Наглядное преподаваніе слѣдуетъ вести такъ, чтобы учащіеся, *дѣлая извѣстныя* геометрическія построенія, производили ихъ съ полнымъ *сознаніемъ того, почему* они дѣлаютъ такъ, а не иначе. Само собою разумѣется, что *наглядныя* средства должны быть по возможности вещественныя. При такомъ *преподаваніи* учащіеся будутъ въ состояніи развивать пріобрѣтенныя познанія,— у нихъ явится *самодѣятельность*. Этому въ особенности должно способствовать индуктивно-катехизическое преподаваніе.

Наконецъ, преподаваніе элементарной геометріи должно имѣть практическое направленіе. Указаніе приложенія той или другой геометрической истины въ обыденной жизни несомнѣнно родитъ *интересъ*. Рѣшеніе же задачъ, какъ графическихъ, такъ равно и числовыхъ, производимое подъ руководствомъ преподавателя, покажетъ степень усвоенія учащимися извѣстныхъ геометрическихъ истинъ.

Полагая, что катехизація однѣхъ и тѣхъ же статей геометріи не можетъ имѣть опредѣленныхъ формъ и что только во время самаго урока сказывается та или другая форма катехизаціи, конечная цѣль которой— довести учащихся до совершенно *яснаго пониманія изложеннаго* въ учебникѣ, я нахожу лишнимъ излагать здѣсь примѣрную катехизацію, хотя бы одного урока, тѣмъ болѣе, что изъ «Образовательнаго курса наглядной геометріи»—Е. Волкова, «Элементарнаго курса геометріи»—Фанъ-деръ-Флита и—«Началъ линейнаго черченія»—Ив. Главинскаго можно заимствовать лучшіе образцы катехизаціи.

По совѣту Я. Фальке въ «Новомъ способѣ обученія началамъ геометріи», опредѣленія должны быть заучены наизусть, но само собою разумѣется не для того, чтобы помнить слова, а чтобы слова были выраженіемъ понятія вполнѣ усвоеннаго. Поэтому, во время урока, учитель путемъ послѣдовательныхъ вопросовъ заставляетъ учениковъ сдѣлать извѣстное *опредѣленіе*, которому затѣмъ дается уже опредѣленная форма и *повторяется во время урока нѣкоторыми* изъ учениковъ.

Взаключеніе считаю не лишнимъ замѣтить, что почти все содержаніе учебника распредѣлено соотвѣтственно тремъ временамъ учебнаго года—осени, зимѣ и веснѣ, съ тою цѣлью, чтобы вопросы, требующіе рѣшенія въ полѣ, возможно было проходить на практикѣ осенью и весною.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЪ I.

А. ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ

I. О линіяхъ.

II. Объ углахъ.

III. О параллельныхъ линіяхъ.

IV. О треугольникахъ.

V. О многоугольникахъ.

VI. О подобіи фигуръ.

VII Вычисленіе площадей

ОТДѢЛЪ II.

Б. ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

II. Измѣреніе поверхности геометрическихъ тѣлъ.

III Измѣреніе объемовъ тѣлъ.

Геометрія въ полѣ.

Списокъ учебныхъ пособій, необходимыхъ при преподаваніи элементарной геометріи.

I. Инструменты

1) Ватерпасъ, правило и отвѣсъ.

2) Плотничій шнуръ или отбойная нитка.

3) 10 вѣшекъ, длиною въ $2^1/_2$ аршина, съ желѣзными башмаками.

4) Аршинъ и складная сажень; мѣрная тесьма, мѣрный шнуръ на катушкѣ и мѣрная цѣпь.

5) 2 цѣпныхъ кола и 10 цѣпныхъ колышковъ.

6) Малочникъ, транспортиръ, наугольникъ, эккеръ крестообразный, или цилиндрическій и колъ для эккера.

7) Большой классный циркуль, линейка и чертежный треугольникъ для черченія мѣломъ на доскѣ.

8) Циркули, линейки и чертежные треугольники, по числу учениковъ, для черченія на бумагѣ.

9) Пропорціональный циркуль.

10) Астролябія на баксѣ и планшетка простѣйшаго устройства,— гдѣ средства училища позволяютъ пріобрѣсти таковыя.

II. Модели.

Кромѣ картонныхъ моделей г. Ожаровскаго, необходимо имѣть, изъ цѣльнаго дерева, еще слѣдующія

1) Различныхъ видовъ треугольники и четыреугольники изъ бѣлой жести. 5-ти, 6-ти и многоугольники изъ картона или изъ дерева, въ 8 вершковъ въ поперечникѣ. Деревянный кругъ съ отъемнымъ секторомъ, раздѣленнымъ на треугольникъ и сегментъ.

2) Прямоугольникъ длиною въ 12, а шириною въ 6 дюймовъ, раздѣленный на квадратные дюймы съ отъемнымъ треугольникомъ (для на-

гляднаго указанія равномѣрности площадей прямоугольника и параллелограмма съ одинаковыми основаніями и высотою).

3) Кубъ, величиною въ кубическую четверть аршина.

4) Призма трегранная прямая и наклонная; призма четырегранная и многогранная, разрѣзанная діагональными плоскостями на трегранныя. Призма трегранная такого устройства, какъ представлено на черт. 133, а.

5) Цилиндръ *прямой* съ *отъемною* частью,—для обращенія его въ наклонный.

6) Кубъ, состоящій изъ 6-ти пирамидъ, имѣющихъ общую вершину въ центрѣ куба, а основаніями—*грани* его (см. черт. 137) Такой же кубъ, разрѣзанный пополамъ, плоскостью параллельною основанію (см. черт. 138).

7) Четырегранная пирамида, разрѣзанная на двѣ трегранныя. Многогранная пирамида, разрѣзанная на трегранныя.

8) Конусъ.

9) Шаръ съ кольцами изъ тонкой проволоки (см. черт. 128).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ.

Все, что занимаетъ извѣстное мѣсто, какъ напримѣръ, камень, кирпичъ, дерево, вода и т. д., *называется тѣломъ.*

Пространство, занимаемое тѣломъ, называется его *протяженіемъ.* Чтобы имѣть точное понятіе о протяженіи или размѣрахъ тѣла, напримѣръ ящика, сундука и т. п., нужно измѣрить его въ длину, ширину и высоту. Знать только одну длину, или же длину и ширину ящика,—не достаточно, потому что можетъ существовать много другихъ ящиковъ, имѣющихъ одну и ту же длину и ширину, но совершенно различныхъ по величинѣ; если же, кромѣ длины и ширины, будетъ извѣстна еще высота, то понятіе о ящикѣ будетъ совершенно опредѣленное. Поэтому, чтобы имѣть понятіе о протяженіи тѣла, нужно мѣрить его въ *длину, ширину и высоту, которая иногда, въ общежитіи,* называется *толщиною* или *глубиною.* (Книга имѣетъ длину, ширину и толщину, а погребъ, яма, ровъ, колодецъ и т. д. имѣютъ длину, ширину и глубину).

Края или границы тѣлъ называются поверхностями. (Показать поверхности куба, кирпича, доски...).

Поверхность, какъ граница тѣла, не можетъ имѣть никакой толщины и потому имѣетъ лишь два измѣренія—*длину и ширину.*

Края или границы *поверхностей называются линіями.* Отъ вида, или формы края поверхности зависитъ и названіе края или линіи. Если край поверхности прямой, то линія называется *прямою,* если же край поверхности зубчатый, какъ у пилы, то линія называется *ломанною.*

Линія, какъ предѣлъ или граница поверхности, не можетъ имѣть ширины, а потому имѣетъ *одно лишь измѣреніе—длину.*

Предѣломъ линіи служитъ *точка,—поэтому* точка не имѣетъ никакого измѣренія.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

А. ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

I. О линіяхъ.

§ 1.

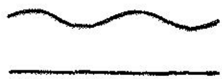
Линія прямая, кривая, ломанная и смѣшанная.—Линіи вертикальныя и горизонтальныя.—Отвѣсъ и ватерпасъ.—Линіи параллельныя.—Свойства прямыхъ линій.—Проведеніе прямыхъ линій линейкою, шнуромъ и вѣшеніе линій.—Измѣреніе линій аршиномъ, шагомѣромъ, мѣрною тесьмой, мѣрнымъ шнуромъ и цѣпью.—Круговая линія и кругъ.—Центръ, дуга, хорда, діаметръ и радіусъ.—Вырѣзокъ и отрѣзокъ.—Касательная и сѣкущая.—Круги концентрическіе.—Овалъ.—Инструменты: циркули, рейсфедеръ и чертежный треугольникъ.—Графическія задачи

Край или граница поверхности называется *линіею*, а конецъ линіи называется *точкою*. Если, проведенную мѣломъ на классной доскѣ, линію будемъ по частямъ стирать, начиная съ котораго нибудь конца ея, то у насъ будутъ получаться линіи все короче и короче, но каждая изъ нихъ будетъ имѣть своимъ предѣломъ у новаго конца точку. Поэтому всякую линію можемъ разсматривать, какъ протяженіе въ длину, состоящее изъ точекъ, поставленныхъ одна у другой. Если точки идутъ въ прямомъ направленіи, то получившаяся линія называется *прямою* (черт. 1); а линія, образовавшаяся изъ точекъ, поставленныхъ одна у другой криво, называется *кривою* (черт. 2). Не натянутая нитка или веревка представляютъ направленіе кривой линіи.

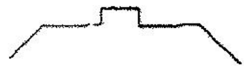
Линія, состоящая изъ нѣсколькихъ прямыхъ сомкнутыхъ концами, но идущихъ въ различныхъ направленіяхъ, называется *ломанною*, (черт. 3). Зубцы пилы и зигзаки молніи представляютъ направленіе ломанной линіи.

Черт. 1.

Черт. 2.



Черт. 3.



Линія, состоящая изъ прямыхъ и кривыхъ линій, идущихъ въ разныя направленія, называется *смѣшанною* (черт. 4). Объяснить наглядно линіею, проведенною по карнизу печки.

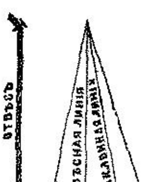
Относительно направленія прямыхъ линій, онѣ раздѣляются на *вертикальныя* или *отвѣсныя*, *горизонтальныя* и *косвенныя* или *наклонныя*.

Прямыя линіи, имѣющія направленіе спокойно висящей нитки съ тяжестью на концѣ (отвѣса), называются *отвѣсными* или *вертикальными* (чер. 5). (Объяснить употребленіе отвѣса).

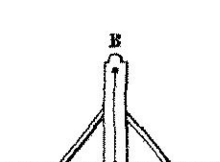
Если нитку съ тяжестью вывести изъ отвѣснаго положенія, то всѣ направленія или положенія нитки во время качанія будутъ представлять собою *наклонныя* или *косвенныя линіи*.

Черт. 4.

Черт. 5.



Черт. 6.



Прямая линія, проведенная на поверхности тихо стоящей воды, и всѣ прямыя линіи, имѣющія подобное направленіе, называются *горизонтальными*.

Ватерпасъ. При настилкѣ пола въ домѣ, а равно при постройкахъ изъ камня, для повѣрки горизонтальности ихъ, употребляютъ ватерпасъ. Онъ состоитъ изъ двухъ брусковъ

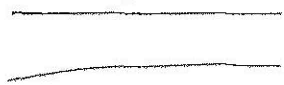
АБ и ВГ, скрѣпленныхъ такъ, что брусокъ ВГ не наклоняется ни въ одну, ни въ другую сторону къ бруску АБ, а для неизмѣнности такого положенія дѣлаютъ подпорки, какъ изображено на чертежѣ 6. Въ брускѣ АБ сдѣланъ желобокъ, а вверху бруска ВГ прикрѣплена нить съ тяжестью, которая достигаетъ желобка. Когда брусокъ АБ находится въ горизонтальномъ положеніи, то тяжесть приходится прямо противъ желобка, при всѣхъ же другихъ положеніяхъ бруска АБ тяжесть отклоняется отъ желобка въ одну или другую сторону.

Горизонтальныя линіи, а также и отвѣсныя, имѣютъ всегда и на всякомъ мѣстѣ опредѣленное и неизмѣнное направленіе; если сблизить двѣ горизонтальныя линіи, лежащія въ вертикальной плоскости, или двѣ вертикальныя, то разстояніе одной линіи отъ другой во всѣхъ точкахъ будетъ одно и то же.

Прямыя линіи, которыя во всѣхъ точкахъ находятся въ равномъ разстояніи одна отъ другой и стало быть на продолженіи своемъ въ обѣ стороны никогда не встрѣчаются, называются *параллельными* (черт. 7), въ противномъ же случаѣ онѣ называются *непараллельными* (черт. 8).

Черт 7.

Черт. 8.

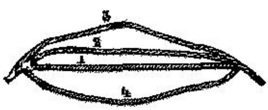


§ 2.

Свойства прямыхъ линій. Для обозначенія кантовъ на бревнѣ, изъ котораго желаютъ приготовить, напримѣръ, столбъ для постройки, плотники обыкновенно употребляютъ *шнуръ*, называемый также *отбойною ниткою*. Для этого отбойную нитку натираютъ мѣломъ или углемъ, кладутъ на бревно въ томъ направленіи, въ которомъ желаютъ сдѣлать кантъ, натягиваютъ ее и, приподнявъ средину, опускаютъ,—тогда отъ удара шнура или отбойной нитки, натертой мѣломъ, получается направленіе, по которому долженъ быть сдѣланъ кантъ.

Возьмемъ и мы плотничій шнуръ, натремъ его мѣломъ, натянемъ туго на полу и, приподнявъ его середину, опустимъ:—отъ удара у насъ получится прямая линія, какъ будто бы проведенная мѣломъ. Если мы не будемъ сдвигать шнура съ мѣста и будемъ держать его туго натянутымъ, то сколько бы разъ мы ни поднимали его средину, всегда отъ удара обозначится то же направленіе, какое получилось въ первый разъ. Если же мы ослабимъ натянутость шнура, но концы его будемъ держать въ тѣхъ же двухъ точкахъ прямой линіи (черт. 9), то положеніе шнура по обѣ стороны прямой можно измѣнять до безконечности. Всякое новое направленіе шнура (черт. 9,—2, 3, 4) уже не будетъ называться прямымъ, исключая первоначальное, когда мы отбити прямую линію. Очевидно, это послѣднее направленіе будетъ самое короткое, всѣ же остальныя, по мѣрѣ удаленія отъ прямой, будутъ дѣлаться длиннѣе.

Черт 9



Когда помощью отбойной нитки желаемъ обозначить прямую линію, то натянутую нитку держатъ только съ двухъ концовъ, въ двухъ извѣстныхъ точкахъ,—поэтому двухъ точекъ достаточно, чтобы провести прямую линію.

Такъ какъ прямую линію можемъ разсматривать, какъ рядъ точекъ, поставленныхъ въ прямомъ направленіи, то, очевидно, мѣстомъ пересѣченія двухъ прямыхъ линій будетъ точка. (Показать наглядно помощью отбойной нитки. Могутъ ли двѣ прямыя линіи пересѣчься въ 2—3 точкахъ?)

Изъ всего сказаннаго можемъ заключить, что:

1) *Между двумя точками можно провести только одну прямую линію и много кривыхъ.*

2) *Прямая есть кратчайшая изъ нихъ.*

3) *Двухъ точекъ достаточно, чтобы провести прямую линію.*

4) *Двѣ прямыя линіи пересѣкаются въ одной точкѣ.*

§ 3.

Проведеніе прямыхъ линій. Для проведенія прямыхъ линій на бумагѣ, или—въ столярномъ ремеслѣ—на доскѣ, употребляютъ линейку.

Вѣрною линейкою называется та, у которой края, или ребра, прямые и параллельные, Чтобы повѣрить, вѣрна ли линейка, ее кладутъ на бумагу и по одному краю проводятъ карандашемъ линію АБ*), потомъ перекладываютъ линейку вверхъ (черт. 10) такъ, чтобы она тѣмъ же самымъ ребромъ лежала при линіи АБ; при этомъ положеніи линейки опять по тому же ребру проводятъ карандашемъ линію. Если окажется, что проведенныя линіи всѣми точками совпадаютъ, то это значитъ, что край линейки—прямой. (Если край линейки будетъ вогнутъ, совпадутъ ли тогда проведенныя линіи?) Такимъ же образомъ повѣряется и другой край линейки.

Черт. 10

Повѣрка параллельности краевъ линейки дѣлается на основаніи понятія о параллельныхъ линіяхъ,—узнаютъ только, во всѣхъ ли точкахъ края линейки равно отстоятъ одинъ отъ другаго.

Если нужно провести на землѣ прямую линію небольшой длины, напримѣръ, для поставки забора, то это можно сдѣлать посредствомъ веревки. Для сего веревку натягиваютъ между двумя изломами или углами забора и по направленію, гдѣ улеглась веревка, вбиваютъ нѣсколько ко-

---

*) Для удобства чтенія прямыхъ линій, ихъ обыкновенно обозначаютъ какими нибудь буквами изъ русскаго или латинскаго алфавита.

лышковъ, которые и обозначатъ направленіе требуемой прямой линіи.

Но веревку съ пользою можно употребить тогда, когда нужно провести прямую линію на небольшое разстояніе,—въ противномъ же случаѣ, вмѣсто веревки, употребляютъ *вѣшки*, или *колья*, по возможности ровные и гладкіе, длиною въ *одну* или *полторы* сажени. Вѣшки обыкновенно снабжаются желѣзными острыми башмаками для удобнаго вбиванія ихъ въ землю. Кромѣ того, для обозначенія точекъ, находящихся одна отъ другой на далекомъ разстояніи, между которыми нужно провести прямую линію, употребляютъ *вѣхи*, то есть длинные шесты (до 4 саженъ), которыя ставятъ отвѣсно въ обозначаемыя точки; а чтобы ихъ лучше можно было видѣть, на верхнихъ концахъ навязываютъ пучки соломы или хвороста, или же навѣшиваютъ цвѣтные флаги.

Проведеніе прямыхъ линій въ полѣ посредствомъ вѣшекъ называется *вѣшеніемъ линій*.

Подобно тому, какъ на бумагѣ проводятъ линію, помощью карандаша и линейки, по двумъ точкамъ и между двумя точками (показать наглядно на бумагѣ или на классной доскѣ), такъ точно и вѣшить линію можно:

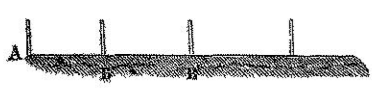
1) *по двумъ даннымъ точкамъ* и

2) *между двумя данными точками.*

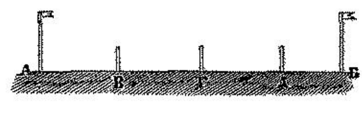
Въ первомъ случаѣ линія только продолжается въ данномъ направленіи, а во второмъ случаѣ линія обозначается между двумя точками.

Провѣшить линію по двумъ даннымъ точкамъ значитъ: поставить вертикально рядъ вѣшекъ такъ, чтобы, смотря чрезъ вѣху, поставленную въ крайней точкѣ, она покрывала бы всѣ вновь поставленныя вѣшки.

Черт 11



Черт 12



1) Чтобы провѣшить линію по двумъ даннымъ точкамъ А и Б (черт. 11), въ которыхъ поставлены вѣшки, для сего, отойдя шаговъ на 80 или 100 въ ту сторону, куда намѣрены продолжить линію, ставятъ вѣшку въ точкѣ В такъ, чтобы смотря чрезъ нее, вѣшка Б совершенно покрывала бы поставленную въ точкѣ А; отойдя опять приблизительно на столько же шаговъ, ставятъ новую вѣшку такимъ же образомъ.

2) Чтобы провѣшить линію между двумя точками А и Б (черт. 12), нужно два человѣка: одинъ изъ нихъ стоитъ на разстояніи одного или двухъ шаговъ отъ вѣхи А, а другой—идетъ съ вѣшкою по направленію къ вѣхѣ Б; когда второй отойдетъ отъ вѣхи А на разстояніе 80 или 100 шаговъ, то стоящій у вѣхи А заставляетъ передвигать вѣшку втораго вправо или влѣво до тѣхъ поръ, пока не попадетъ въ точку В, находящуюся на прямой АБ, или пока вѣха В не закроетъ вѣху Б. Такимъ же образомъ ставятъ вѣшки Г и Д, или же продолжаютъ вѣшить по двумъ точкамъ А и В.

§ 4.

Измѣреніе линій. Измѣрить прямую линію значитъ —найти, сколько разъ содержится въ ней другая прямая, принятая за единицу мѣры. Такъ, напримѣръ, чтобы составить понятіе о длинѣ комнаты, мы должны взять извѣстную единицу мѣры, напримѣръ аршинъ, и накладывать по длинѣ пола;—если аршинъ улегся 10 разъ, то говорятъ, что длина комнаты равна 10-ти аршинамъ. Это сравненіе длины пола съ аршиномъ называется *измѣреніемъ*.

Во всѣхъ государствахъ, для измѣренія различныхъ величинъ, существуютъ свои постоянныя, утвержденныя закономъ мѣры.

Мѣры длины, употребляемыя въ Россіи, слѣдующія:

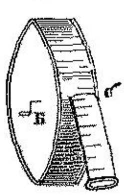
Географическая миля заключаетъ	7	верстъ,
а въ общежитіи	10	верстъ.
Верста	500	саженъ.
Сажень	3	аршина.
Аршинъ	16	вершковъ.
Сажень	7	футовъ.
Футъ	12	дюймовъ.
Дюймъ	10	линій.

Самое простое измѣреніе длины линій, за точность котораго нельзя ручаться, можно произвести *шагомѣромъ.* Для этого нужно идти отъ одного конца прямой линіи къ другому въ прямомъ направленіи, считая при этомъ шаги. Средній шагъ взрослаго человѣка равенъ одному аршину; стало быть, каждые 3 шага слѣдуетъ считать за одну сажень.

Для точнаго измѣренія на землѣ большихъ разстояній употребляется *мѣрный шнуръ и мѣрная цѣпь;* а при архитектурномъ измѣреніи, кромѣ аршина, употребляется *мѣрная тесьма.*

Мѣрная тесьма приготовляется изъ пеньки, длиною отъ 3-хъ до 20-ти саженъ. Она вывариваетcя въ маслѣ и покрывается масляною краскою; а когда высохнетъ, ее дѣлятъ черточками на сажени, аршины и вершки съ одной стороны, а съ другой—на сажени, футы и дюймы. Дѣленія эти подписываются цифрами, и всю тесьму покрываютъ лакомъ. Приготовленную такимъ образомъ тесьму помѣщаютъ въ цилиндрическую коробку (черт. 13), прикрѣпляя ее однимъ концомъ къ валику Б, проходящему чрезъ внутрь

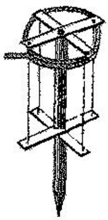
Черт. 13



коробки, а другой конецъ пропускаютъ въ прорѣзъ *а б,* и къ этому концу прикрѣпляется кольцо такой величины, чтобы оно не могло пройти сквозь прорѣзъ. Посредствомъ этого кольца тесьма вытягивается изъ коробки, а посредствомъ рукоятки, прикрѣпленной къ валику Б, она обратно втягивается въ коробку, наматываясь на валикъ.

Мѣрный шнуръ свивается изъ пеньки и дѣлается длиною отъ 10 до 100 саженъ. Его вывариваютъ въ маслѣ и раздѣляютъ на сажени, которыя обозначаются лоскутами кожи или узлами. Шнуръ наматываютъ на катушку, какъ представлено на чертежѣ 14. Колъ, на которомъ вращается катушка, имѣетъ на концѣ желѣзный башмакъ для удобнаго втыканія въ землю. Шнуръ употребляется только при такихъ измѣреніяхъ, которые не требуютъ особой точности. Самое же измѣреніе производится такъ: въ одинъ конецъ измѣряемой линіи ставятъ катушку съ намотаннымъ шнуромъ и, взявъ конецъ шнура, тянутъ его по направленію измѣряемой линіи; дойдя же до другаго конца линіи, остается сосчитать число саженъ въ размотанномъ шнурѣ.

Черт. 14



Мѣрная цѣпь (черт. 15) дѣлается изъ проволоки, толщиною въ гусиное перо. Цѣпь состоитъ изъ колѣнъ, соединенныхъ небольшими кольцами, а на концахъ цѣпи дѣлаютъ по одному большому кольцу, чтобы въ нихъ вдѣвать цѣпные колья, употребляемые при измѣреніи линій.

Черт. 15

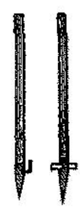
Отъ центра маленькаго кольца *а* (см. черт.) до центра другаго конечнаго маленькаго кольца *б* длина цѣпи равна 10-ти саженямъ.

Каждое колѣно цѣпи дѣлается обыкновенно длиною въ 1 футъ, а такъ какъ сажень имѣетъ 7 футовъ, то 7 колѣнъ цѣпи составляютъ одну сажень. Для обозначенія отдѣльныхъ саженъ, чрезъ каждыя 7 колѣнъ цѣпи, на кольцахъ, соединяющихъ ихъ, привѣшиваются мѣдныя бляхи съ номерами, идущими съ обоихъ концовъ цѣпи, 1, 2, 3, 4 и 5, которые показываютъ число саженъ.

Мѣрная цѣпь, у которой длина колѣна равна 1 футу, имѣетъ 70 колѣнъ. Но бываютъ и такія цѣпи, у которыхъ колѣнъ 100; слѣдовательно у такой цѣпи длина каждаго колѣна равна $^1/_{10}$ сажени.

При измѣреніи прямыхъ линій, цѣпь большими кольцами надѣваютъ на *цѣпные колья* (черт. 16), которые дѣлаются длиною въ 2 аршина и внизу снабжаются желѣзными башмаками для удобнаго втыканія въ землю. Кромѣ сего, внизу вбиваютъ желѣзный крючекъ, или поперечку, чтобы не спадали кольца надѣтой цѣпи.

Черт. 16.



Чтобы измѣрить линію АВ (черт. 17), два человѣка, взявъ цѣпь, надѣваютъ ее большими конечными кольцами на цѣпные колья и вытягиваютъ ее по провѣшенной линіи. Одинъ человѣкъ, идущій съ заднимъ концомъ цѣпи, ставитъ свой цѣпной колъ такъ, чтобы центръ малаго кольца *a*(черт. 15) былъ при основаніи вѣхи А, поставленной при началѣ линіи. Тогда несущій передній конецъ цѣпи, по подаваемымъ ему знакамъ, передвигаетъ свой цѣпной колъ вправо или влѣво до тѣхъ поръ, пока онъ точно станетъ на провѣшенную линію; послѣ этого цѣпь встряхиваетъ, вытягиваетъ и противъ центра послѣдняго малаго кольца ставитъ *цѣпной колышекъ*, которыхъ у него должно быть 10. Цѣпные колышки (черт. 18) дѣлаются изъ такой же проволоки, какъ и цѣпь, или же изъ дерева,—длиною въ полтора фута. Намѣтивъ такимъ образомъ конецъ цѣпи, или первый десятокъ саженъ, оба человѣка идутъ впередъ по линіи. Когда идущій

Черт. 17.

Черт. 18.

сзади дойдетъ до поставленнаго колышка, онъ останавливаетъ передняго и ставитъ свой цѣпной колъ такъ, чтобы центръ перваго маленькаго кольца цѣпи былъ подлѣ колышка, а идущій впереди опять направляется по линіи, встряхиваетъ и вытягиваетъ цѣпь, и снова намѣчаетъ колышкомъ конецъ второй цѣпи, или второй десятокъ саженъ. Такимъ же порядкомъ продолжаютъ измѣреніе до конца линіи.

Если у идущаго впереди вышли всѣ 10 колышковъ, то идущій сзади, уставивъ свой цѣпной колъ возлѣ послѣдняго колышка и вынувъ его, пересчитываетъ, всѣ ли 10 колышковъ на лицо;—если всѣ колышки есть, то, передавъ ихъ идущему впереди, самъ намѣчаетъ нарѣзкою на *палочкѣ*, *или* карандашемъ *на бумагѣ*, первую сотню саженъ промѣренной линіи, и идутъ дальше.

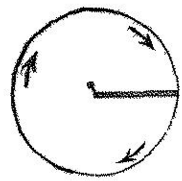
Дойдя до другаго конца измѣряемой линіи, несущій передній конецъ цѣпи не останавливается, а протягиваетъ цѣпь далѣе, до тѣхъ поръ, пока идущій сзади дойдетъ до послѣдняго цѣпнаго колышка, и потомъ уже отсчитываетъ число саженъ и футовъ до конца линіи.

При измѣреніи линій нужно цѣпь натягивать туго, дабы она не ложилась по неровностямъ земли, а имѣла бы видъ натянутой струны.

§ 5.

Круговая линія. Если на плоскости стола укрѣпимъ булавкой одинъ конецъ нитки, а другой конецъ, къ которому привязанъ кусокъ мѣла, натянувъ туго, будемъ двигать въ одну сторону, пока мѣлъ придетъ на прежнее мѣсто, то, отъ прикосновенія мѣла, на столѣ получится правильная кривая линія, называемая *круговою, или окружностью* (чер. 19). Точка, въ которую была воткнута булавка, называется *центромъ*; а такъ какъ эта точка равно удалена отъ всѣхъ точекъ окружности (почему?), то центромъ называется точка круга, равноудаленная отъ всѣхъ точекъ окружности;—а разстояніе отъ центра до всѣхъ точекъ окружности называется *радіусомъ*. (Всѣ ли радіусы равны? Почему?). Плоскость, ограниченная круговою линіею, называется *кругомъ*. (Разсмотрѣть обручъ и дно (кругъ) бочки, и вывести наглядное различіе между окружностью и кругомъ.)

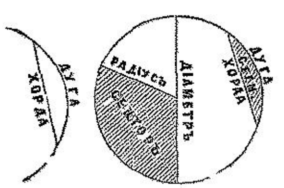
черт. 19.



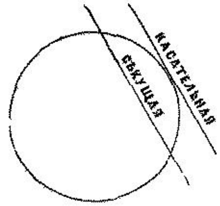
Часть круговой линіи, или окружности, называется *дугою*; а линія, соединяющая концы дуги, называется *хордою* (черт. 20). Самая большая хорда, проходящая чрезъ центръ и дѣлящая кругъ на двѣ равныя части, называется *діаметромъ*. (Сколько въ кругѣ можно провести хордъ и діаметровъ? Всѣ ли хорды равны? А діаметры? Изъ чего состоитъ діаметръ?)

Часть круга, заключенная между двумя радіусами и дугою, называется *секторомъ* или *вырѣзкомъ;* а часть круга, заключенная между хордою и дугою, называется *сегментомъ*, или *отрѣзкомъ* (см. чер. 20).

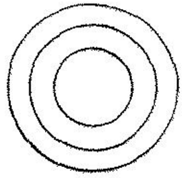
Черт. 20



Черт 21



Черт. 22



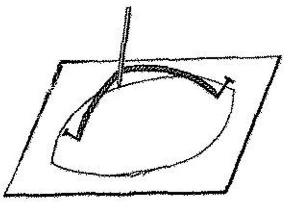
Линія, имѣющая общую точку съ окружностью и не пересѣкающая ее, называется *касательною;* линія же, пересѣкающая окружность, называется *сѣкущею* (черт. 21).

(Въ скольких точкахъ прямая линія пересѣкаетъ окружность?)

Круги, имѣющіе общій центръ, но различные радіусы, называются *концентрическими,* или *одноцентренными* (черт. 22).

Возьмемъ нитку и къ концамъ ея привяжемъ по булавкѣ, потомъ булавки воткнемъ въ доску стола на такомъ разстояніи одна отъ другой, чтобы нитка не была натянута. Если, оттянувъ нитку (черт. 23), проведемъ карандашемъ черту сперва вверхъ, а потомъ внизу, то у насъ получится кривая линія, называемая *овальною,* или *элипсомъ.*

Черт. 23.



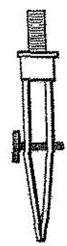
§ 6.

Инструменты для черченія. Кромѣ линейки, при черченіи употребляются: циркуль, рейсфедеръ, или чертежное перо, и чертежный треугольникъ.

Для отложенія прямыхъ линій на бумагѣ и для черченія окружностей употребляютъ *циркуль,* который бываетъ *простой* и *вставной.*

Черт 24.

Черт 25.

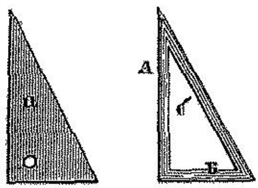


Простой циркуль состоитъ изъ двухъ мѣдныхъ (до половины) ножекъ, скрѣпленныхъ вверху винтомъ, на который навинчивается гайка съ двумя углубленіями. Въ эти углубленія вставляется циркульный ключъ А (черт. 24), помощью котораго дается ножкамъ циркуля тугой или легкій ходъ. Концы ножекъ циркуля дѣлаются обыкновенно изъ хорошей стали.

Вставной циркуль отличается отъ простаго тѣмъ, что у него одна ножка вынимается и вмѣсто нея вставляется, смотря по надобности, въ особенной вставной ножкѣ карандашъ, или же *рейсфедеръ*, употребляемые, въ такомъ случаѣ, для черченія окружностей.

Рейсфедеръ, или чертежное перо, состоитъ изъ двухъ тонкихъ стальныхъ пластинокъ (черт. 25), сдвигаемыхъ и раздвигаемыхъ, смотря по надобности, винтомъ. Между пластинокъ впускается жидкая тушь или чернило для черченія. Чѣмъ больше сдвигать пластинки рейсфедера посредствомъ винта, тѣмъ черта, проводимая имъ, будетъ тоньше.

Черт 26.



Чертежный треугольникъ вырѣзывается или изъ цѣльной дощечки, какъ это представлено на черт. 26, *а*; или же составляется изъ трехъ линеекъ, скрѣпленныхъ между собою (черт. 26, *б*). Чертежный треугольникъ долженъ удовлетворять слѣдующимъ условіямъ: а) онъ не долженъ коробиться; б) всѣ три края должны быть прямы и в) край А не долженъ наклоняться къ краю Б,—эти два края должны быть въ такомъ положеніи другъ къ другу, въ какомъ вертикальная линія находится къ горизонтальной, лежащей въ одной плоскости съ первою *).

Задачи.**) 1. По данному радіусу и центру описать окружность.

---

*) Съ употребленіемъ чертежнаго треугольника учащіеся знакомятся въ классѣ на урокахъ черченія.

**) Задачи, рѣшаемыя помощью линейки и циркуля, называются *графическими*,—въ отличіе отъ задачъ, которыхъ рѣшеніе зависитъ отъ вычисленія, и называемыхъ, поэтому, *числовыми*

2) Изъ даннаго центра провести окружность такъ, чтобы она прошла чрезъ данную точку.

3) Отъ данной точки провести нѣсколько линій равной длины, въ различныхъ направленіяхъ.

4) По данному діаметру начертить окружность.

5) На прямой линіи описать полуокружность.

6) Чрезъ точку, взятую на окружности, провести хорду, равную данной прямой линіи.

7) Изъ точки, взятой внѣ прямой линіи, описать окружность, которая пересѣкла бы эту прямую.

8) Сколько въ окружности центровъ, радіусовъ, діаметровъ и хордъ.

II. Объ углахъ.

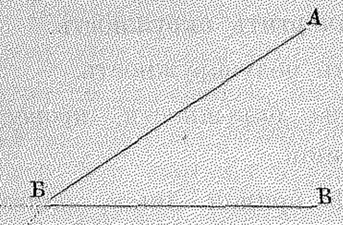
Опредѣленіе угла, а также сторонъ и вершины его.—Углы прямые, острые и тупые.—Зависимость величины угловъ отъ наклоненія сторонъ.—Углы смежные и вертикальные.—Мѣра угловъ.—Малка.—Измѣреніе угловъ способомъ *повторенія*.—Транспортиръ и его употребленіе.—Наугольникъ и его употребленіе. Эккеръ крестообразный и цилиндрическій.—Свойство перпендикуляра и наклонныхъ, и задачи, на немъ основанныя.—Свойства смежныхъ и вертикальныхъ угловъ.

§ 7.

Если на плоскости проведемъ двѣ прямыя линіи, взаимно пересѣкающіяся, то онѣ образуютъ уголъ.

Такъ какъ плоскость не вполнѣ ограничивается двумя прямыми пересѣкающимися линіями (почему?), то *угломъ* называется неопредѣленная часть плоскости, заключенной между двумя пересѣкающимися прямыми линіями (чер. 27). Прямыя, образующія уголъ, называются его *сторонами*, или *боками;* а точка, въ которой стороны угла пересѣкаются, называется *вершиною угла.*

Черт. 27.



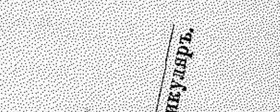
Уголъ читается или одною буквою, стоящею при вершинѣ, или тремя буквами, но такъ, чтобы буква, стоящая при вершинѣ угла, находилась бы между буквами, поставленными на концахъ сторонъ; напримѣръ, уголъ на чер. 27 читается: <АБВ или <Б.

Такъ какъ двѣ линіи встрѣчаясь въ одной точкѣ, могутъ находиться въ различномъ положеніи относительно другъ друга, то и углы бываютъ тоже различные: *прямые, острые* и *тупые.*

Изъ прямыхъ линій, какъ мы уже знаемъ, только горизонтальныя и вертикальныя имѣютъ опредѣленное положеніе. Если сблизимъ вертикальную линію съ горизонтальною такъ, чтобы онѣ пересѣклись (черт. 28), то вертикальная линія будетъ прямо стоять на горизонтальной, т. е. она не будетъ наклоняться ни вправо, ни влѣво.

Черт. 28.

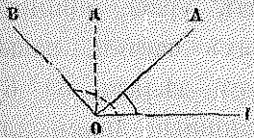
Черт. 29.



Линія проведенная къ другой такъ, что не наклоняется ни вправо, ни влѣво, называется *перпендикуляромъ* (черт. 28 и 29). Всѣ углы, образуемые двумя взаимно перпендикулярными линіями, называются *прямыми.* (Показать прямые углы на черт. 28 и 29, а также и у всѣхъ видимыхъ въ классѣ предметовъ). Очевидно, что всѣ прямые углы равны (почему?) и величина прямаго угла постоянна.

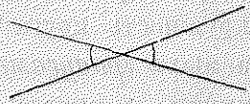
Уголъ, который меньше прямаго, называется *острымъ*, напримѣръ <АОБ (чер. 30); а уголъ, который больше прямаго, называется *тупымъ*, какъ напр. <ВОБ. (Показать на черт. 30, чѣмъ острый меньше, а тупой больше прямаго. Объяснить на томъ же чертежѣ неудобство обозначать уголъ одною буквою).

Черт. 30.



Черт. 31.

Черт. 32.



Величина всякаго угла не зависитъ отъ длины сторонъ, а отъ большаго или меньшаго ихъ наклоненія,—ибо сколько бы мы ни продолжали стороны угла, самый уголъ всегда сохранитъ одну и ту же величину.

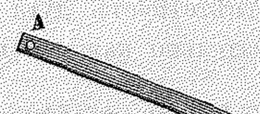
Смежными углами называются такіе, которые имѣютъ общую вершину и одну общую сторону, а другія двѣ стороны составляютъ прямую линію (черт. 31).

Углы, образовавшіеся отъ пересѣченія двухъ прямыхъ линій, продолженныхъ за точку пересѣченія, называются *вертикальными* (черт. 32).

§ 8.

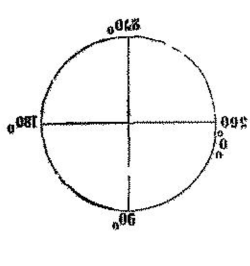
Мѣра угловъ. Столяры, для опредѣленія величины острыхъ и тупыхъ угловъ и для нарѣзки ихъ, употребляютъ *малку*, или *малочникъ*. Малка (черт. 33) состоитъ изъ двухъ линеекъ, соединенныхъ винтомъ такъ, что ихъ можно сдвигать и раздвигать по произволу. Возьмемъ малку и на концѣ одной изъ линеекъ

Черт. 33.



сдѣлаемъ прорѣзъ A, куда можно было бы вставить мѣлъ. Сдвинемъ обѣ линейки, чтобы одна закрыла другую и, приложивъ къ доскѣ, по верхнему краю проведемъ мѣломъ черту; потомъ верхнюю линейку малки, въ прорѣзъ которой вставленъ мѣлъ, будемъ медленно двигать вверхъ, тогда мѣлъ будетъ чертить дугу, которая будетъ увеличиваться по мѣрѣ растворенія линеекъ. Но линейки краями своими образуютъ уголъ, стало-быть величина дуги зависитъ отъ величины угла, и поэтому дуга можетъ служить мѣрою угла. А такъ какъ дуга есть часть окружности, то чтобы имѣть возможность измѣрять углы, принято окружность круга дѣлить на 360 равныхъ частей, называемыхъ *градусами;* каждый же градусъ дѣлятъ на 60 минутъ, а минуту на 60 секундъ. Условные знаки для обозначенія этихъ дѣленій суть: для градусовъ—маленькій кружокъ (^{0}), для минутъ—запятая ($'$), а для секундъ—двѣ запятыхъ ($''$). Такъ, $57^0 25' 48''$ значитъ: пятьдесятъ семь градусовъ, двадцать пять минутъ и сорокъ восемъ секундъ.

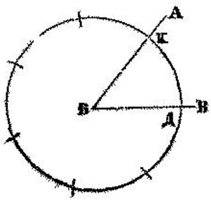
Черт 34.



Если въ кругѣ проведемъ два взаимно перпендикулярные діаметра (черт. 34). то кругъ и окружность раздѣлятся на 4 равныя части (почему?); а такъ какъ вся окружность заключаетъ въ себѣ 360^0, то $^1/_4$ окружности будетъ заключать 90^0. Но проведенные нами діаметры перпендикулярны, т. е. при центрѣ круга прямые углы и каждому углу соотвѣтствуетъ дуга въ $^1/_4$ окружности, или 90^0,—слѣдовательно каждый прямой уголъ заключаетъ въ себѣ 90^0.

Чтобы опредѣлить величину угла въ градусахъ, минутахъ и секундахъ безъ особаго инструмента, то измѣреніе производятъ *способомъ повторенія*. Принявъ вершину угла АБВ (черт. 35) за центръ, произвольнымъ радіусомъ

Черт. 35.

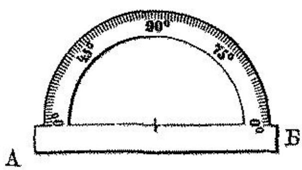


описываемъ окружность; потомъ, взявъ циркулемъ дугу КД, будемъ откладывать ее по окружности. Если эта дуга улеглась 7 разъ, то величина угла равна $\frac{360^0}{7}=51^0 25' 42\frac{6''}{7}$.

Если дуга, даннаго для измѣренія угла, не содержится въ окружности цѣлое число разъ, то, для опредѣленія величины угла, употребляютъ особый снарядъ, называемый *транспортиромъ*.

Транспортиръ есть мѣдный или роговой полукругъ, раздѣленный на 180^0 (черт. 36); иногда градусы на транспортирѣ подраздѣляются на полуградусы и четверти градуса.

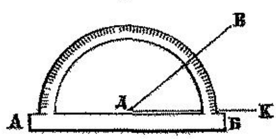
Черт 36



Градусныя дѣленія на транспортирѣ подписываются или въ обѣ стороны полуокружности отъ 0^0 до 180^0, или съ обоихъ концовъ полуокружности отъ 0^0 до 90^0. На линейкѣ АБ, верхній край который представляетъ діаметръ, дѣлается черточка, обозначающая центръ полуокружности.

Если нужно измѣрить данный уголъ ВДК (черт. 37) помощью транспортира, его прикладываютъ центромъ къ вершинѣ даннаго угла такъ, чтобы верхній край линейки АБ совпалъ съ направленіемъ стороны даннаго угла, ДК:—тогда число градусовъ, сосчитанныхъ по дугѣ транспортира отъ 0^0 до пересѣченія съ нею (дугою) другой стороны ВД, дастъ величину измѣряемаго угла.

Черт 37.



Чтобы построить уголъ извѣстнаго числа градусовъ помощью транспортира, нужно его приложить верхнимъ краемъ линейки АБ (черт. 37) къ линіи при которой строится уголъ, такъ, чтобы центръ транспортира находился надъ точкою, принятою за вершину угла, потомъ, отсчитавъ отъ 0^0 по дугѣ транспортира данное число градусовъ, ставятъ противъ этого дѣленія на бумагѣ точку. Снявъ транспортиръ, соединяютъ эту точку съ точкою, принятою за вершину угла, получаютъ требуемый уголъ.

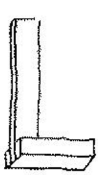
Задачи. 1. Изъ данной точки, взятой на прямой, возставить перпендикуляръ помощью транспортира.

2. Построить транспортиромъ уголъ въ 17^0, $25^030'$, 67^0, $83^030'$, 89^0, 145^0 и 179^0.

§ 9.

Наугольникъ. Чтобы быстро намѣчать и повѣрять прямые углы, столяры употребляютъ снарядъ, называемый наугольникомъ. Онъ состоитъ изъ двухъ линеекъ, перпендикулярно скрѣпленныхъ между собою; одна изъ линеекъ АБ дѣлается обыкновенно въ 3 раза толще другой (черт. 38). Чтобы повѣрить прямой уголъ у наугольника, его прикладываютъ толстою линейкою АБ (черт. 38) къ ровному краю доски, а по направленію другой линейки наугольника проводятъ карандашемъ линію; послѣ сего перекладываютъ наугольникъ на другую сторону, и если при этомъ линейка, по которой провели линію, будетъ совершенно прилегать къ ней (къ линіи), то прямой уголъ въ наугольникѣ вѣренъ. (Можно ли такимъ же образомъ повѣрить прямой уголъ у чертежнаго треугольника?)

Черт 38

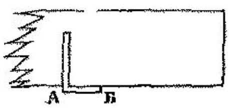


А Б

Для повѣрки прямаго угла у стола или у оконной рамы, наугольникъ прикладываютъ къ угламъ означенныхъ предметовъ, и если наугольникъ своими линейками плотно прилегаетъ къ углу стола или рамы, то прямой уголъ у нихъ вѣренъ. При повѣркѣ прямаго угла у доски стола, мы повѣряемъ уголъ выдающійся, а у оконной рамы—вдающійся; стало быть, наугольникомъ можно повѣрять углы *выдающіеся* и *вдающіеся*.

Кромѣ означеннаго употребленія, столяры проводятъ наугольникомъ перпендикулярныя линіи.

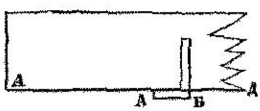
Черт 39



Если нужно отрѣзать доску въ извѣстной точкѣ, перпендикулярно ея краю, наугольникъ толстою линейкою АБ (черт. 39) прикладываютъ въ этой точкѣ къ краю доски, а по направленію другой линейки проводятъ карандашемъ черту, по которой и отрѣзываютъ доску.

Если нужно отрѣзать доску перпендикулярно ея нижнему краю АД, но чрезъ сучокъ, находящійся по срединѣ доски, то, приложивъ наугольникъ линейкою АБ (черт. 40) къ краю доски, подвигаютъ его впередъ, пока другая линейка коснется сучка; тогда проводятъ карандашемъ черту и по ней доску отрѣзаютъ.

Черт 40

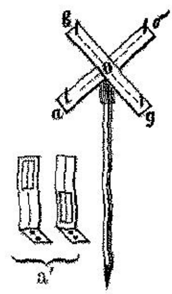


§ 10.

Эккеръ. Если къ улицѣ, идущей въ прямомъ направленіи, нужно провести другую улицу подъ прямымъ угломъ или, иначе сказать, перпендикулярно, то въ данномъ случаѣ наугольникъ употребить нельзя, потому что положить вѣрно наугольникъ на землѣ въ извѣстномъ направленіи—невозможно. Поэтому, для проведенія перпендикулярныхъ линій на поверхности земли, употребляютъ особый снарядъ, называемый *эккеромъ*.

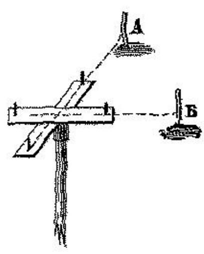
Эккеръ состоитъ изъ двухъ деревянныхъ или металлическихъ линеекъ *аб* и *вд* (черт. 41), соединенныхъ между собою крестообразно—подъ прямымъ *угломъ*. (Сколько образовалось прямыхъ угловъ?) На линейкахъ *аб* и *вд* проводятся двѣ взаимно перпендикулярныя линіи. Отъ точки 0, т. е. отъ точки пересѣченія этихъ линій, откладываются равныя линіи и на концахъ *перпендикулярно къ линейкамъ* укрѣпляются *шпеньки*, или *діоптры*. (Устройство діоптровъ? Черт. 41, а'). Снизу эккера, противъ точки пересѣченія линій, проведенныхъ на верхней поверхности линеекъ, укрѣпляется винтами цилиндрическая трубка, *которою* эккеръ надѣвается на палку, заостренную и окованную снизу желѣзомъ—для удобнаго втыканія въ землю.

Черт 41



Главное достоинство эккера заключается въ томъ, чтобы *линейки аб* и *вд* были скрѣплены перпендикулярно и чтобы шпеньки, или діоптры, тоже стояли перпендикулярно на линейкахъ.

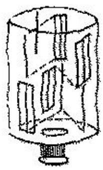
Черт 42



Чтобы повѣрить, перпендикулярно ли скрѣплены линейки эккера, его надѣваютъ на палку, которую отвѣсно втыкаютъ въ землю и *по направленію* обѣихъ паръ шпеньковъ ставятъ вѣшки А и Б (черт. 42); послѣ сего дѣлаютъ эккеромъ ¼ оборота, т. е. поворачиваютъ его такъ, чтобы та пара шпеньковъ, которая была направлена на вѣху А, была бы направлена на вѣху Б,—*если послѣ* этого другая пара шпеньковъ покроетъ вѣху А, то эккеръ вѣренъ, т. е. линейки его скрѣплены перпендикулярно.

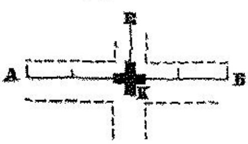
Кромѣ описаннаго эккера, который по формѣ своей называется *крестообразнымъ*, бываетъ еще *цилиндрическій* эккеръ (*черт.* 43), отличающійся отъ перваго цилиндрическою формою. Онъ дѣлается изъ мѣди и, вмѣсто шпеньковъ, или діоптровъ, имѣетъ на бокахъ прорѣзы въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ направленіяхъ. *Прорѣзы* эти *дѣлаются такъ точно, какъ* діоптры въ крестообразномъ эккерѣ.

Черт 43.



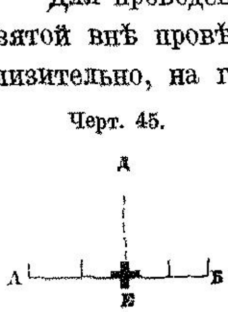
Чтобы посредствомъ эккера провести къ данной улицѣ въ извѣстномъ мѣстѣ другую улицу перпендикулярно первой, для сего по направленію улицы провѣшиваютъ прямую АБ (черт. 44), параллельно сторонѣ улицы, и въ точку К, *взятую на* линіи АБ, чрезъ которую нужно провести перпендикуляръ, ставятъ эккеръ; послѣ сего одну пару шпеньковъ направляютъ по линіи АБ, а по направленію другой пары ставятъ вѣшку Е. Снявъ *эккеръ, въ точку* К ставятъ вѣшку и *по этимъ* двумъ вѣшкамъ продолжаютъ линію сколько нужно;—эта новая линія и будетъ перпендикулярна первой.

Черт. 44



Для проведенія перпендикуляра изъ точки Д (черт. 45), взятой внѣ провѣшенной прямой АБ, опредѣляютъ приблизительно, на глазъ, точку Е на *линіи* АБ, которая была бы основаніемъ перпендикуляру, опущенному изъ точки Д. Въ точкѣ Е ставятъ эккеръ и одну пару шпеньковъ направляютъ по линіи АБ, а по направленію другой пары смотрятъ, покрываетъ ли она вѣху Д; если другая пара шпеньковъ не покрываетъ вѣхи Д, то замѣчаютъ, куда нужно переставить эккеръ: вправо или влѣво, чтобы эта пара шпеньковъ покрыла вѣху Д. Опредѣливъ такимъ

Черт. 45.



образомъ точно основаніе перпендикуляра, въ точку Е ставятъ вѣшку и получившійся перпендикуляръ ДЕ продолжаютъ сколько нужно.

При внимательномъ наблюденіи хода возстановленія и опущенія перпендикуляровъ посредствомъ эккера, можно вполнѣ убѣдиться, что:

1) Изъ точки, взятой на прямой линіи, можно возставить только одинъ перпендикуляръ, и

2) Изъ точки, взятой внѣ прямой, можно опустить на прямую только одинъ перпендикуляръ.

§ 11.

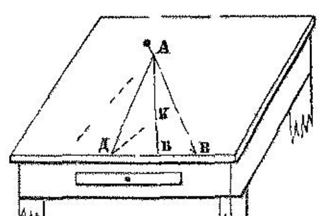
Свойства перпендикуляра и наклонныхъ линій. Всякая линія, проведенная отъ точки къ прямой линіи, не имѣющая направленія перпендикуляра, называется *наклонною.*

Чтобы ознакомиться со свойствами перпендикуляра и наклонныхъ линій, рѣшимъ слѣдующую задачу:

Измѣрить разстояніе отъ сучка въ доскѣ стола до ея края.

Для сего возьмемъ нитку и булавку,— булавку воткнемъ въ сучокъ (черт. 46) и къ ней прикрѣпимъ нитку, которою будемъ измѣрять требуемое разстояніе. Измѣряя это разстояніе въ перпендикулярномъ направленіи, мы увидимъ, что оно будетъ самое короткое, потому что, отклонивъ нитку вправо или влѣво, разстояніе получится, длиннѣе и съ увеличеніемъ отклоненія нитки отъ перпендикулярнаго направленія, будетъ увеличиваться и разстояніе отъ сучка до края доски.

Черт 47.



Если отъ основанія перпендикуляра АБ, отъ точки Б, отложимъ по краю стола, въ обѣ стороны два равныя разстоянія ДБ и БВ, и измѣримъ разстояніе точекъ Д и В отъ А, то убѣдимся, что эти разстоянія будутъ одинаковы. Если возьмемъ какую нибудь точку на перпендикулярѣ АБ, напримѣръ точку К, и измѣримъ разстояніе ея отъ точекъ Д и В, то и эти разстоянія будутъ тоже одинаковы.

Отсюда можемъ заключить:

1) *Перпендикуляръ короче всякой наклонной линіи.*

2) *Наклонныя тѣмъ длиннѣе, чѣмъ дальше удалены отъ основанія перпендикуляра.*

3) *Изъ наклонныхъ—равноудаленныя отъ основанія перпендикуляра равны между собою.*

4) *Всякая точка на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины прямой, равноудалена отъ концовъ ея,* и

5) Обратное заключеніе: *всякая точка, равноудаленная отъ концовъ прямой, находится на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины.*

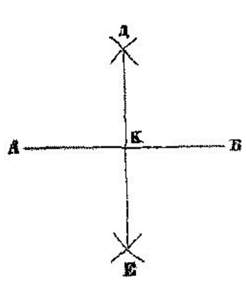
§ 12.

На основаніи выведенныхъ заключеній можно помощью циркуля рѣшить слѣдущія задачи:

1) *Раздѣлить данную прямую по поламъ.*

Чтобы линію АБ (черт. 47) раздѣлить пополамъ, для сего изъ точекъ А и Б радіусами, бóльшими половины АБ (почему радіусъ берется больше половины прямой?), очерчиваютъ дуги, пересѣкающіяся въ точкѣ Д, которая, по равенству радіусовъ, будетъ находиться въ равномъ разстояніи отъ концовъ А и Б, а слѣдовательно будетъ находиться на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины прямой АБ. Описавъ тѣми же радіусами дуги по другую сторону прямой. получимъ точку Е, равноудаленную отъ концовъ прямой АБ, а стало быть находящуюся на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины пря-

Черт 47



мой. Такимъ образомъ у насъ получилось двѣ точки двухъ перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ средины одной и той же прямой, то, чтобы опредѣлить ея средину, остается соединить точки Д и Е прямою линіею, которая при пересѣченіи съ линіею АБ, дастъ искомую точку К.

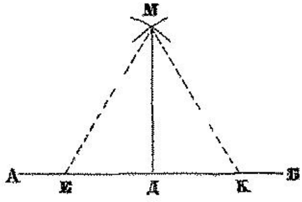
2) *Изъ точки, взятой на прямой, возставить перпендикуляръ.*

Отложивъ отъ точки Д (черт. 48), изъ которой нужно возставить перпендикуляръ, по обѣ стороны равныя линіи ДЕ и ДК, изъ точекъ Е и К произвольнымъ радіусомъ описываютъ дуги, пересѣкающіяся въ точкѣ М, которая, по равенству радіусовъ, будетъ равноудалена отъ точекъ Е и К. А намъ извѣстно, что такая точка находится на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины прямой; слѣдовательно, соединивъ точку М съ Д, получимъ требуемый перпендикуляръ.

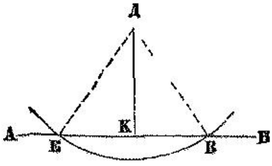
3) *Изъ точки, взятой внѣ прямой, опустить перпендикуляръ.*

Изъ данной точки Д (черт. 49) произвольнымъ радіусомъ описываютъ дугу, которая пересѣкла бы линію АБ въ двухъ точкахъ В и Е; затѣмъ линію ВЕ дѣлятъ

Черт. 48



Черт 49.

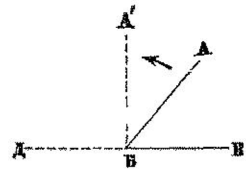


пополамъ и точку К соединяютъ съ точкою Д, тогда и получится требуемый перпендикуляръ,—потому что точка Д равноудалена отъ концовъ В и Е, слѣдовательно находится на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины ВЕ.

§ 13.

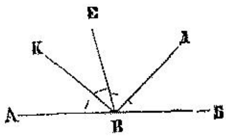
Свойство смежныхъ угловъ. Если въ остромъ углѣ АБВ (чер. 50) продолжимъ сторону ВБ въ прямомъ направленіи до точки Д, то получимъ тупой уголъ АБД, который будетъ называться *смежнымъ угломъ* <АБВ, потому что они имѣютъ общую межу АБ. Развернувъ острый <АБВ до величины прямаго угла, получимъ два прямые угла: <А'БВ и <А'БД. Но уже извѣстно, что всѣ прямые углы равны, слѣдовательно, если смежные углы равны, то они прямые и сумма ихъ равна двумъ прямымъ угламъ. Но если смежные углы и не будутъ равны, какъ, напримѣръ, <АБВ и <АБД, то и тогда сумма ихъ равна двумъ прямымъ угламъ, потому что на сколько тупой уголъ больше прямаго, на столько же другой острый—меньше прямаго, какъ это видно на чертежѣ. Поэтому можемъ сказать, что *сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.*

Черт 50.

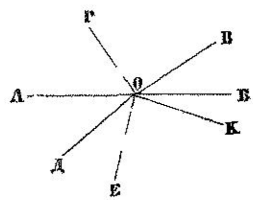


Сумма всѣхъ угловъ, лежащихъ по одну сторону прямой АБ (черт. 51) и имѣющихъ общую вершину въ точкѣ В, *равна двумъ прямымъ угламъ*, потому что,

Черт. 51



Черт. 52



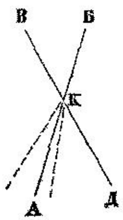
соединивъ ихъ въ два произвольной величины угла, получимъ два смежныхъ угла, которыхъ сумма равна двумъ прямымъ угламъ.

Сумма всѣхъ угловъ, лежащихъ по обѣ стороны прямой АБ (черт. 52) и имѣющихъ общую вершину въ точкѣ О, *равна четыремъ прямымъ угламъ*, потому что сумма угловъ, лежащихъ по одну сторону прямой, равна двумъ прямымъ, стало быть по обѣ стороны—четыремъ прямымъ угламъ.

§ 14.

Свойство вертикальныхъ угловъ. Двѣ прямыя линіи АБ и ВД (черт. 53), пересѣкающіяся въ точкѣ К, образуютъ два острые угла ВКБ и АКД и два тупые угла ВКА и БКД, которые называются *вертикальными*, или *противоположными вершинами.*

Черт. 53



Всѣ вертикальные углы равны. Если допустить, что <ВКБ не равенъ <АКД, то пришлось бы допустить, что линія АБ, послѣ пересѣченія съ ВД, уклонилась вправо или влѣво. Но какъ этого допустить нельзя, потому что только прямыя линіи при пересѣченіи образуютъ вертикальные углы, то нельзя допустить и того, что вертикальные углы неравны.

III. О параллельныхъ линіяхъ.

Опредѣленіе параллельныхъ линій и проведеніе ихъ помощью шнурка и эккера — Объ углахъ, образующихся отъ пересѣченія двухъ параллельныхъ третьею наклонною линіею

§ 15.

Двѣ прямыя линіи, лежащія въ одной плоскости и находящіяся во всѣхъ точкахъ въ равномъ разстояніи одна отъ другой, а слѣдовательно никогда невстрѣчающіяся, называются *параллельными.*

Самый простой способъ проведенія параллельныхъ линій, вытекающій изъ ихъ опредѣленія, какъ линій, находящихся во всѣхъ точкахъ въ равномъ разстояніи одна отъ другой, состоитъ въ томъ, что отъ данной прямой линіи АБ (черт. 54), изъ двухъ произвольныхъ точекъ *в* и *д*, отмѣриваютъ въ перпендикулярномъ направленіи два равныя разстоянія посредствомъ циркуля или снурка (если нужно провести на небольшомъ разстояніи) и, по соединеніи точекъ *а* и *б* прямою линіею, продолжаютъ ее въ обѣ стороны и получаютъ линію ВД, параллельную АБ.

Черт. 54

Проведеніе параллельныхъ линій на поверхности земли производится посредствомъ эккера.

Положимъ, что къ данной межѣ АБ (черт. 55) нужно провести чрезъ точку В другую межу, параллельно первой.

Для сего, провѣшивъ межу АБ, изъ точки В опускаемъ перпендикуляръ, который обозначимъ нѣсколькими вѣшками. Затѣмъ переходимъ въ точку В и къ перпендикуляру ВД возставляемъ другой перпендикуляръ ВК, который и продолжаемъ въ обѣ стороны на требуемое разстояніе, тогда получившаяся линія будетъ параллельна межѣ АБ. Если допустимъ, что КВ не параллельна АБ, то на протяженіи онѣ встрѣтились бы въ одной точкѣ; слѣдовательно, при этомъ предположеніи, изъ одной точки можно опустить два перпендикуляра, чего быть не можетъ.

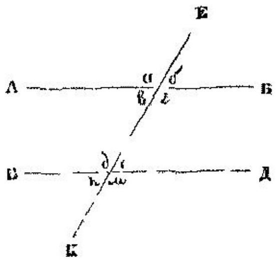
Черт. 55

Объ углахъ, образующихся отъ пересѣченія двухъ параллельныхъ третьею наклонною линіею. Если двѣ параллельныя линіи АБ и ВД (черт. 56) пересѣчемъ третьею наклонною прямою линіею ЕК, то получимъ восемь угловъ. которые имѣютъ разныя названія.

1) Углы: *а, б, к* и *м,* какъ лежащіе внѣ параллельныхъ линій, называются *внѣшними углами.*

2) Углы: *в, г, д* и *е,* какъ лежащіе внутри параллельныхъ линій, называются *внутренними.*

Черт. 56.



3) Углы: *б* и *е, г* и *м, а* и *д, в* и *к,* показывающіе степень наклоненія сѣкущей къ параллельнымъ, называются *углами наклоненія,* или *соотвѣтственными.*

4) Углы: *в* и *е, г* и *д,* называются *внутренними накрестъ-лежащими.*

5) Углы: *а* и *м. б* и *к,* называются *внѣшними накрестъ-лежащими.*

6) Кромѣ поясненныхъ угловъ, слѣдуетъ еще здѣсь различать *смежные углы* и *вертикальные.* (Показать тѣ и другіе).

Изъ понятія о параллельныхъ линіяхъ, какъ линіяхъ, имѣющихъ одинаковое направленіе, слѣдуетъ, что наклоненіе къ нимъ сѣкущей прямой линіи должно быть одинаковое;—слѣдовательно, *всѣ углы наклоненія или соотвѣтственные углы соотвѣтственно равны между собою.*

Всѣ внутренніе накрестъ-лежащіе углы соотвѣтственно равны между собою, потому что $<$б$=<$е, какъ соотвѣтственные, а$<$б$=<$в, какъ вертикальные,—слѣдовательно и $<$в$=<$е. Такимъ же образомъ можно доказать, что и $<$г$=<$д.

Всѣ внѣшніе накрестъ-лежащіе углы соотвѣтственно равны между собою, потому что $<$б$=<$е, какъ соотвѣтственные, а $<$е$=<$к, какъ вертикальные, слѣдовательно и $<$б$=<$к. Такимъ-же образомъ можно доказать, что и $<$а$=<$м.

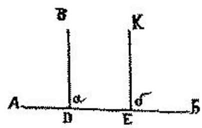
Изъ полученныхъ выводовъ можно вывести обратное заключеніе, что линіи параллельны:

1) Когда углы наклоненія соотвѣтственно равны между собою.

2) Когда внутренніе накрестъ-лежащіе углы соотвѣтственно равны, и

3) Когда внѣшніе накрестъ-лежащіе углы равны между собою.

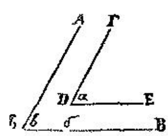
Черт. 57.



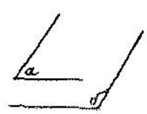
Слѣдствіе 1. Къ линіи АБ (чер. 57) изъ точекъ В и К проведемъ перпендикуляры ВД и КЕ, то при основаніи этихъ перпендикуляровъ получатся углы *а* и *б*, которые будутъ равны, какъ прямые; равенство же этихъ угловъ соотвѣтственныхъ доказываетъ, что перпендикуляры ВД и КЕ параллельны между собою. Итакъ, *если къ одной и той же прямой проведемъ два перпендикуляра, то они будутъ параллельны между собою.*

Слѣдствіе 2. Два однородные угла, т.-е. два острые или два тупые угла, равны, если стороны ихъ взаимно параллельны. Чтобы доказать это, сторону ГД (черт. 58) продолжимъ до встрѣчи со стороною БВ, тогда <а=<б, какъ углы наклоненія, а<б=<в по той же причинѣ,—слѣдовательно и <а=<в.

Черт 58



Черт. 59



Если возьмемъ два разнородные угла съ параллельными сторонами, то они, какъ видно на чертежѣ 59, не будутъ равны между собою.

IV. О треугольникахъ.

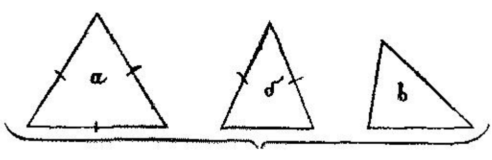
Опредѣленіе прямолинейной фигуры и треугольника.—Треугольники равносторонніе, равнобедренные и разносторонніе—Треугольники остроугольные тупоугольные и прямоугольные —Гипотенуза и катетъ.—Основаніе и высота треугольника.—Свойство высотъ въ остроугольномъ треугольникѣ —Найти сумму угловъ въ треугольникѣ —Раздѣлить прямой уголъ на 3 равныя части — Условія равенства косоугольныхъ и прямоугольныхъ треугольниковъ.—Свойство высоты въ равнобедренномъ треугольникѣ —Рѣшеніе практическихъ задачъ.—Упражненія

§ 16.

Плоскость, ограниченная со всѣхъ сторонъ прямыми линіями, называется *прямолинейною фигурою.* Линіи, ограничивающія фигуру, называются ея *сторонами.*

Названіе всякой прямолинейной фигуры зависитъ отъ числа угловъ и сторонъ ея. Фигура, ограниченная тремя сомкнутыми прямыми линіями, называется *треугольникомъ* (черт. 60). Всякій треугольникъ имѣетъ три стороны и три угла.

Черт. 60.



Такъ какъ стороны въ треугольникѣ могутъ быть различной величины, то относительно сторонъ треугольники бываютъ:

1) *Равносторонніе треугольники,* у которыхъ всѣ стороны равны между собою (черт. 60, а).

2) *Равнобедренные,* у которыхъ только двѣ стороны равны, а третья можетъ быть больше или меньше (чер. 60, б), и

3) *Разносторонніе,* у которыхъ всѣ стороны различной величины (черт. 60, в).

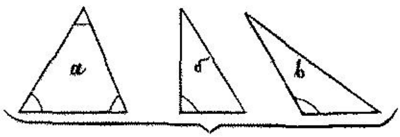
Относительно угловъ треугольники бываютъ:

1) *Остроугольные треугольники,* у которыхъ всѣ углы острые (черт. 61, а).

2) *Прямоугольные треугольники*, у которыхъ одинъ уголъ прямой (черт. 61, б). (Можно ли начертить треугольникъ съ двумя прямыми углами?), и

3) *Тупоугольные треугольники*, у которыхъ одинъ уголъ тупой (черт. 61, в). (Можно ли начертить треугольникъ съ двумя тупыми углами?)

Черт 61.

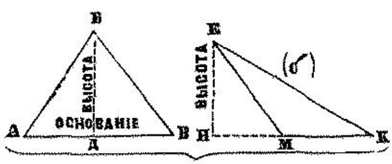


Стороны прямоугольнаго треугольника, образующія прямой уголъ, называются *катетами*, а сторона прямоугольнаго треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузою* (черт. 61, б).

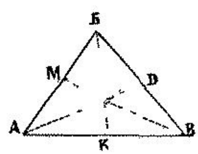
§ 17.

Основаніе и высота треугольника. Обыкновенно ту сторону, на которой треугольникъ представляется стоящимъ, называютъ *основаніемъ*, а вершину, противолежащаго ему угла, называютъ *вершиною* треугольника (черт. 62). Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины треугольника на основаніе или на его продолженіе (черт. 62, б), называется *высотою*. Въ прямоугольномъ треугольникѣ высотою его будетъ катетъ, если другой катетъ служитъ основаніемъ.

Черт. 62



Черт 63



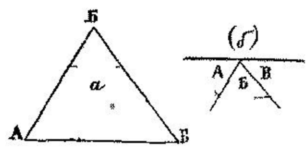
Такъ какъ въ треугольникѣ три стороны и каждая изъ нихъ можетъ быть принята за основаніе, слѣдовательно въ треугольникѣ можно провести и три высоты. Проведя въ остроугольномъ треугольникѣ АБВ (черт. 63) высоты БК, АД и ВМ, мы убѣдимся, что онѣ встрѣтятся внутри треугольника въ одной точкѣ.

(Начертите прямоугольный и тупоугольный треугольники; проведите въ нихъ высоты и опредѣлите, гдѣ онѣ встрѣчаются.)

§ 18.

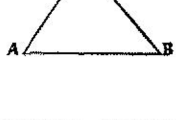
Найти сумму угловъ въ треугольникѣ. Чтобы опредѣлить сумму угловъ въ треугольникѣ АБВ (черт. 64), отрѣжемъ его углы и приложимъ ихъ одинъ къ другому, какъ показано на чертежѣ 64, *б*. тогда края угловъ А и В, приложенныхъ вершинами своими къ вершинѣ <Б, образуютъ прямую линію. А намъ уже извѣстно, что сумма угловъ, имѣющихъ вершину въ одной точкѣ и лежащихъ по одну сторону прямой, равна двумъ прямымъ угламъ, слѣдовательно *сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ*.

Черт. 64.



Тотъ же самый результатъ можно вывести другимъ способомъ. Для сего въ △ АБВ (черт. 65), чрезъ вершину <Б, проведемъ прямую линію параллельную основанію; тогда получимъ, что <*а*=<А и <*в*=<В, какъ внутренніе накрестъ-лежащіе. Но сумма угловъ *а*, *б* и *в*, какъ угловъ, лежащихъ по одну сторону прямой и имѣющихъ вершину въ одной точкѣ, равна двумъ прямымъ,—слѣдовательно и сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ.

Черт 65



Зная, чему равна сумма угловъ въ треугольникѣ, легко опредѣлить въ градусахъ величину каждаго угла въ треугольникахъ: равностороннемъ, равнобедренномъ—прямоугольномъ и косоугольномъ, а также и разностороннемъ.

1) Такъ какъ въ равностороннемъ треугольникѣ всѣ углы равны, а сумма всѣхъ равна 180°, то каждый уголъ равносторонняго треугольника будетъ заключать въ себѣ 60°.

2) Въ равнобедренномъ-прямоугольномъ треугольникѣ одинъ уголъ содержитъ 90°, слѣдовательно на другіе два остается тоже 90°; а такъ какъ они равны (почему?), то каждый изъ нихъ содежитъ по 45°.

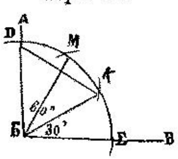
3) Чтобы опредѣлить величину каждаго изъ угловъ равнобедреннаго - косоугольнаго треугольника, достаточно опредѣлить величину угла, заключеннаго между равными сторонами (посредствомъ транспортира); тогда, если вычтемъ величину этого угла изъ 180°, то получимъ сумму остальныхъ двухъ угловъ, равныхъ между собою (почему?). Раздѣливъ же этотъ остатокъ пополамъ, получимъ величину каждаго изъ угловъ въ отдѣльности.

4) Величина каждаго изъ угловъ въ разностороннемъ треугольникѣ опредѣляется посредствомъ транспортира.

Основываясь на вышеизложенномъ, рѣшимъ слѣдующую задачу:

Раздѣлить прямой уголъ на три равныя части, посредствомъ построенія на одной изъ сторонъ его равносторонняго треугольника.

Черт. 66



Для сего въ прямомъ углѣ АБВ (черт. 66), изъ вершины его Б описываемъ дугу, которая пересѣкла бы стороны въ точкахъ Д и Е, потомъ изъ точки Д, тѣмъ же самымъ радіусомъ, описываемъ другую дугу, которая пересѣкла бы первую въ точкѣ К. Соединивъ точку К съ Д и Б, получимъ равносторонній треугольникъ БДК, составленный изъ равныхъ радіусовъ. Такъ какъ каждый изъ угловъ равносторонняго треугольника равенъ 60°, то стало быть и уголъ ДБК равняется 60°, а <КБЕ содержитъ 30°, потому что онъ составляетъ дополненіе <ДБК до прямаго угла. Если хорду, соотвѣтствующую дугѣ ЕК, отложимъ посредствомъ циркуля на дугѣ КД, то эта послѣдняя въ точкѣ М раздѣлится пополамъ (почему?); соединивъ точку М съ Б, уголъ въ 60^0 тоже раздѣлится пополамъ и задача будетъ рѣшена.

§ 19.

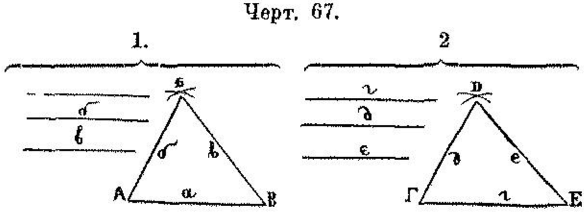
Условія равенства косоугольныхъ треугольниковъ. Равными треугольниками называются такіе, которые имѣютъ одинаковую форму и величину, и по наложеніи совершенно покрываютъ другъ друга.

Чтобы найти условія равенства треугольниковъ, рѣшимъ послѣдовательно слѣдующія три задачи:

1) *Построить треугольникъ по тремъ даннымъ сторонамъ.*

Замѣнивъ данныя стороны соотвѣтственной длины палочками при построеніи изъ нихъ треугольника, мы поступили бы такъ: къ концамъ одной палочки приложили бы концы двухъ другихъ, а потомъ сдвигали бы ихъ до тѣхъ поръ, пока другіе концы не коснутся другъ друга. Прослѣдивъ внимательно движеніе двухъ палочекъ, мы увидимъ, что сдвигаемые концы описываютъ дуги, а въ точкѣ пересѣченія дугъ палочки сходятся.

Черт. 67.

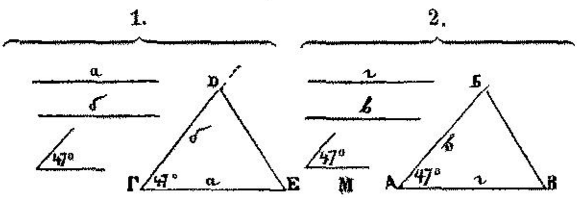


Поэтому, для построенія треугольника по тремъ сторонамъ *а, б* и *в* (черт. 67, 1.), беремъ сторону *а* и изъ точки А, радіусомъ равнымъ линіи *б*, описываемъ дугу, а затѣмъ изъ точки В, радіусомъ равнымъ линіи *в*, тоже описываемъ дугу; пересѣченіе дугъ дастъ точку Б, которую, если соединимъ съ концами А и В, получимъ △ АБВ, построенный соотвѣтственно требованію.

Если по тремъ сторонамъ *г*, *д* и *е* (черт. 67, 2), *соотвѣтственно равнымъ а, б и в,* построимъ другой △ ГДЕ, то онъ совершенно будетъ равенъ первому, потому что точка Д находится въ такомъ же положеніи относительно концовъ стороны ГЕ, *въ какомъ точка Б находится относительно* концовъ стороны АВ (такъ-ли? почему?). Если построенные такимъ образомъ треугольники вырѣжемъ и наложимъ одинъ на другой, то они совершенно *покроютъ* другъ друга.—Отсюда выводимъ заключеніе, что для равенства треугольниковъ достаточно, чтобы три стороны одного треугольника были бы порознь равны тремъ сторонамъ другаго треугольника. (Разскажите, какъ поступаютъ при постройкѣ обыкновенныхъ стропилъ?)

2) *Построить треугольникъ по сторонамъ а и б и по углу между ними заключенному въ 47°* (черт. 68, 1).

Черт. 68.



Для сего на произвольной линіи ГМ (черт. 68), помощью циркуля, откладываемъ линію *а* до точки Е; потомъ, *помощью транспортира, при линіи ГЕ въ точкѣ Г* строимъ уголъ въ 47° и на сторонѣ ГД откладываемъ до точки Д линію *б;* соединивъ точку Д съ Е, получимъ △ ГДЕ, построенный по данному условію.

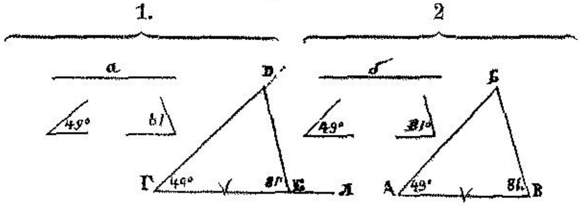
Если по такимъ же двумъ сторонамъ *в* и *г* (черт. 68, 2) и такому же углу въ 47° построимъ новый △ АБВ, то онъ совершенно будетъ равенъ первому. А чтобы убѣдиться въ томъ, покроютъ ли они другъ друга, наложимъ мысленно

△ГДЕ на △ АБВ такъ, чтобы сторона ГЕ пошла по направленію стороны АВ; по равенству этихъ сторонъ точки Г и Е совмѣстятся съ точками А и В. Такъ какъ <Г=<А, то сторона ГД пойдетъ по направленію АБ и, по равенству этихъ сторонъ, точка Д совмѣстится съ точкою Б. Поелику же крайнія точки Д и Е совмѣстились съ точками Б и В, то и линія ДЕ совмѣстится съ линіею БВ, потому что между двумя точками болѣе одной прямой линіи провести нельзя;—стало быть △ ГДЕ совершенно покроетъ △ АБВ. (Покроетъ ли △ ГДЕ другой △ АБВ, если будемъ, при наложеніи ихъ другъ на друга, прикладывать сторону ГД къ сторонѣ АВ?—Почему?)

3) *Построить треугольникъ по сторонѣ а и двумъ прилежащимъ къ ней угламъ въ 81° и 49°* (черт. 69, 1).

Для рѣшенія задачи, на произвольной линіи ГЛ, помощью циркуля, откладываемъ сторону *а* (черт. 69, 1) до точки Е; затѣмъ, помощью транспортира, при точкахъ

Черт 69.



Г и Е, на линіи ГЕ, строимъ углы, равные даннымъ въ 81 и 49 градусовъ. Отъ пересѣченія продолженныхъ сторонъ начерченныхъ угловъ, получимъ точку Д и вмѣстѣ съ тѣмъ △ ГДЕ, построенный согласно предложенному условію.

Если по такой же сторонѣ *б* (черт. 69, 2) и такимъ же двумъ угламъ въ 81 и 49 градусовъ построимъ новый △АБВ то онъ будетъ совершенно равенъ первому, потому что вершина Д въ △ ГДЕ и вершина Б въ △ АБВ опредѣляются пересѣченіемъ сторонъ однихъ и тѣхъ же угловъ, соотвѣтственно построенныхъ при равныхъ сторонахъ; слѣдовательно, точки Б и Д имѣютъ совершенно одинаковое положеніе относительно сторонъ АВ и ГЕ, и потому, по наложеніи △ АБВ на △ ГДЕ такъ, чтобы ГЕ совмѣстилась съ равною ей стороною АВ, точка Д совмѣстится съ Б и △ АБВ совершенно покроетъ △ ГДЕ.

Изъ рѣшеній этихъ трехъ задачъ, мы можемъ вывести слѣдующія условія равенства косоугольныхъ треугольниковъ:

1) *Треугольники равны, когда три стороны одного треугольника равны порознь тремъ сторонамъ другаго треугольника.*

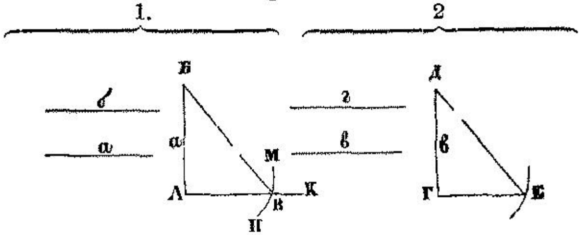
2) *Когда двѣ стороны и уголъ, между ними заключенный въ одномъ треугольникѣ, равны порознь двумъ сторонамъ и углу, заключенному между ними въ другомъ треугольникѣ, и*

3) *Когда сторона и два прилежащіе къ ней угла въ одномъ треугольникѣ порознь равны сторонѣ и двумъ прилежащимъ угламъ въ другомъ треугольникѣ.*

§ 20.

Условія равенства прямоугольныхъ треугольниковъ. Выведенныя условія равенства для косоугольныхъ треугольниковъ могутъ быть приложены ко всѣмъ вообще треуголь-

Черт. 70.



никамъ, а слѣдовательно и къ прямоугольнымъ; но такъ какъ эти послѣдніе имѣютъ болѣе опредѣленную форму, то условія равенства ихъ менѣе сложны.

Для опредѣленія условій равенства прямоугольныхъ треугольниковъ, рѣшимъ слѣдующія задачи:

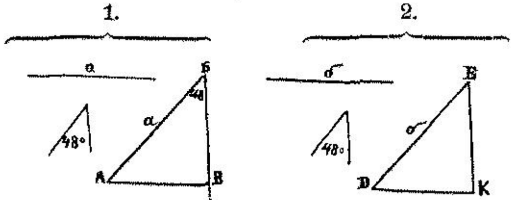
1) *Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ б и одному изъ катетовъ а* (черт. 70, 1).

Для сего на произвольной линіи АК (черт. 70) изъ точки А возставляемъ перпендикуляръ АБ, на которомъ откладываемъ величину катета *а*, потомъ, взявъ циркулемъ гипотенузу *б*, изъ точки Б описываемъ дугу МН; отъ пересѣченія этой дуги съ линіею АК получимъ точку В, а соединивъ ее съ Б, получимъ требуемый △ АБВ.

Если по такому же катету *в* и такой же гипотенузѣ *г* построимъ новый △ ГДЕ (черт. 70, 2), то онъ будетъ равенъ первому, потому что точка В въ первомъ треугольникѣ находится въ такомъ же положеніи относительно катета АБ, въ какомъ точка Е находится относительно катета ГД. Справедливость сказаннаго видна также изъ того, что гипотенуза БВ=ДЕ (по условію *б*=*г*), стало быть онѣ равно удалены отъ основанія перпендикуляровъ АБ и ГД, а поэтому АВ=ГЕ, слѣдовательно, по наложеніи другъ на друга, △ ГДЕ совмѣстится съ △ АБВ.

2) *Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ а и острому углу въ 48°.*

Черт. 71



Для рѣшенія задачи, на произвольной прямой линіи, посредствомъ циркуля, откладываемъ линію АБ (черт. 71), равную гипотенузѣ *а*, потомъ при точкѣ Б строимъ уголъ въ 48° и сторону БВ продолжаемъ; наконецъ изъ точки А опускаемъ перпендикуляръ на сторону БВ, тогда получится искомый △ АБВ.

Построивъ по такой же гипотенузѣ б (черт. 71, 2) и такому же углу въ 48° △ ДЕК, заключаемъ о его равенствѣ съ первымъ изъ того, что положенiе точки В относительно стороны АБ опредѣляется пересѣченiемъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ линiй, такъ точно, какъ и въ △ ДЕК опредѣляется положенiе точки К.

Изъ рѣшенiя этихъ двухъ задачъ можемъ заключить, что:

1) *Прямоугольные треугольники равны, если гипотенуза и одинъ изъ катетовъ въ одномъ треугольникѣ соотвѣтственно равны гипотенузѣ и катету другаго треугольника,* и

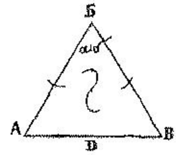
2) *Если гипотенузы и одинъ изъ острыхъ угловъ въ одномъ треугольникѣ соотвѣтственно равны гипотенузѣ и острому углу въ другомъ треугольникѣ.*

§ 21.

Свойство высоты въ равнобедренномъ треугольникѣ. Если въ равнобедренномъ △ АБВ изъ вершины Б опустимъ перпендикуляръ БД (черт. 72), который будетъ высотою треугольника, то получимъ два прямоугольные треугольника: АБД и ДБВ, которые будутъ равны, потому что гипотенуза АБ=ВБ, какъ стороны равнобедреннаго треугольника, а катетъ БД общiй для обоихъ треугольниковъ. А такъ какъ въ равныхъ треугольникахъ всѣ углы и стороны соотвѣтственно равны, то мы можемъ заключить, что сторона АД=ДВ и $<$ а $=<$ б.

Итакъ, *если изъ вершины равнобедреннаго треугольника опустимъ перпендикуляръ на основанiе, то онъ раздѣлитъ пополамъ, какъ основанiе, такъ и уголъ при вершинѣ.*

Черт. 72.

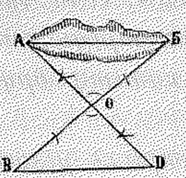


На основанiи этого свойства высоты въ равнобедренномъ треугольникѣ, можемъ вывести обратное заключенiе: *если основанiе равнобедреннаго треугольника раздѣлимъ пополамъ и средину соединимъ съ вершиною треугольника, то уголъ при вершинѣ раздѣлится пополамъ.*

§ 22.

Рѣшеніе нѣкоторыхъ практическихъ задачъ, основанное на равенствѣ треугольниковъ.

Черт. 73.



1) *Измѣрить линію АБ* (черт. 73), *проходящую чрезъ оврагъ, болото, озеро и т. п.*

Если длина линіи АБ не превышаетъ 10—20 саженъ, то измѣреніе производится непосредственно, натягивая туго цѣпь или веревку; въ противномъ же случаѣ прибѣгаютъ къ геометрическому построенію. Для сего изъ точки Б провѣшиваютъ въ произвольномъ направленіи линію БВ, а изъ точки А—линію АД такъ, чтобы она пересѣкла первую; потомъ отъ точки пересѣченія О откладываемъ линію ОВ=ОБ и ОД=ОА, тогда линія ВД замѣнитъ собою АБ, что видно изъ равенства треугольниковъ АБО и ОВД.

2) *Измѣрить линію АБ* (черт. 74), *проходящую чрезъ рѣку, если доступна только точка Б.*

Для рѣшенія задачи обозначимъ вѣшкою третью точку В, находящуюся на продолженіи прямой АБ, и изъ точекъ Б и В дѣлаемъ такое же построеніе, какъ и въ предыдущей задачѣ. Соединивъ точки Г и Д прямою ГД, продол-

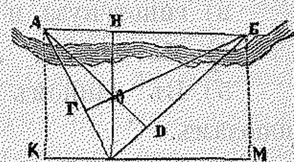
Черт. 74.

Черт. 75.

жимъ ее и чрезъ точку О проведемъ прямую АЕ до встрѣчи съ продолженіемъ линіи ГД;—тогда полученные треугольники АБО и ДЕО, имѣющіе по сторонѣ и по два прилежащіе угла соотвѣтственно равные, будутъ равны. Изъ равенства же ихъ можемъ заключить, что сторона АБ=ДЕ;— стало быть линія ДЕ замѣнитъ непристулную линію АБ.

3) *Измѣрить ширину рѣки посредствомъ эккера и цѣпи.* Проведя параллельно берегу рѣки, линію АБ (черт. 75), замѣчаютъ какую нибудь точку В на противоположномъ берегу, и изъ точки В, посредствомъ эккера, опускаютъ перпендикуляръ на прямую АБ; затѣмъ изъ точки Б возставляютъ перпендикуляръ, потомъ, раздѣливъ линію АБ пополамъ, по направленію ВО проводятъ прямую до встрѣчи съ перпендикуляромъ БД. Тогда, изъ равенства получившихся треугольниковъ АВО и ОБД, можемъ видѣть, что БД совершенно замѣнитъ сторону АВ, которая изображаетъ измѣряемую ширину рѣки.

Черт. 76.



4) *Измѣрить линію АБ* (черт. 76), *лежащую за рѣкою.* Для сего, избравъ точку В, изъ которой видны были бы точки А и Б, опускаемъ изъ нихъ, помощью эккера, перпендикуляры АД и БГ на линіи ВБ и АВ; затѣмъ, соединивъ точку пересѣченія этихъ перпендикуляровъ О съ точкою В, получимъ перпендикуляръ ВН къ линіи АБ (почему? см. § 17). Потомъ чрезъ точку В, посредствомъ эккера, проводимъ линію параллельную АБ, и изъ точекъ А и Б опускаемъ перпендикуляры АК и БМ, тогда линія КМ замѣнитъ собою АБ.

Упражненія.

1) Построить равносторонній треугольникъ, если дана:
а) одна сторона.

2) Построить равнобедренный треугольникъ, если дана:
а) одна изъ равныхъ сторонъ и уголъ при вершинѣ въ 46°.
б) основаніе и уголъ при вершинѣ въ 50°.

в) основаніе и высота.

г) одна изъ равныхъ сторонъ и высота.

д) основаніе и одна изъ равныхъ сторонъ.

3) Построить равнобедренный прямоугольный треугольникъ, когда данъ:

а) одинъ катетъ.

б) гипотенуза.

4) Построить прямоугольный треугольникъ, если данъ:

а) катетъ и одинъ острый уголъ.

б) гипотенуза и одинъ острый уголъ.

в) гипотенуза и катетъ.

г) оба катета.

5) Въ данномъ треугольникѣ всѣ углы раздѣлить пополамъ.

V. О многоугольникахъ.

Понятіе о четыреугольникѣ, пятиугольникѣ и многоугольникѣ.—Квадратъ, ромбъ, прямоугольникъ, параллелограммъ и трапеція.—Основаніе и высота ихъ. Діагональ.—Многоугольники правильные и неправильные. Периметръ.—О вписанныхъ въ кругѣ и описанныхъ около него многоугольникахъ.—Равенство правильныхъ многоугольниковъ.—Задачи, относящіяся къ окружности.

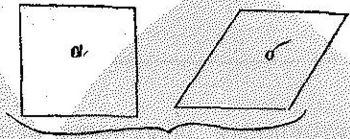
§ 23.

Плоскость можетъ быть ограничена не только тремя прямыми линіями, но и большимъ числомъ прямыхъ; такъ, напримѣръ, прямолинейная фигура можетъ имѣть четыре стороны и четыре угла, тогда она называется *четыреугольникомъ*; фигура, имѣющая пять сторонъ и пять угловъ, называется *пятиугольникомъ* и т. д.; наконецъ, прямолинейная фигура, имѣющая много сторонъ и много угловъ, называется *многоугольникомъ*.

Изъ четыреугольниковъ, имѣющихъ опредѣленную форму различаются слѣдующіе:

1) *Квадратомъ* (черт. 77, а) называется четыреугольникъ, у котораго всѣ стороны равны и всѣ углы прямые. (Начертите квадратный вершокъ, футъ, аршинъ).

Черт. 77.



2) *Ромбъ* (чет. 77, б). Если вообразимъ, что стороны квадрата соединены шарнирами, такъ что его можно покосить въ какую угодно сторону, тогда покошенный квадратъ будетъ называтся ромбомъ. (Можно ли покосить треугольникъ, если стороны его будутъ соединены шарнирами?) Стало быть *ромбомъ* называется четыреугольникъ, у котораго всѣ стороны равны и параллельны, а противолежащіе углы равны. (Доказать равенство противолежащихъ угловъ, основываясь на параллельности сторонъ.)

3) *Прямоугольникомъ* (черт. 78) называется четыреугольникъ, имѣющій всѣ углы прямые и только противолежащія стороны равныя.

4) *Параллелограммъ* (черт. 79). Вообразивъ, что прямоугольникъ покошенъ вправо или влѣво, получимъ параллелограммъ; слѣдовательно, *параллелограммомъ* называется четыреугольникъ, у котораго только каждыя двѣ

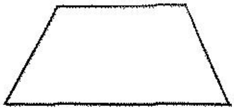
Черт. 78.

Черт. 79.

противолежащія стороны и каждые два противолежащіе угла равны между собою.

5) *Трапеціею* называется четыреугольникъ (черт. 80), у котораго двѣ стороны параллельны, а двѣ непараллельны. Скаты у нѣкоторыхъ крышъ имѣютъ форму трапецій.

Черт 80.



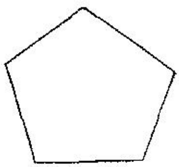
Ту сторону, на которой четыреугольникъ представляется какъбы стоящимъ, обыкновенно называютъ *основаніемъ;* а перпендикуляръ, проведенный изъ вершины противолежащаго угла на основаніе, или на его продолженіе, называется *высотою.* (Показать основаніе и высоту въ квадратѣ. ромбѣ, прямоугольникѣ, параллелограммѣ и трапеціи.)

Прямая, соединяющая вершины двухъ какихъ нибудь угловъ четыреугольника, или вообще многоугольника, не лежащихъ при одной сторонѣ, называется *діагональю* (черт. 81). (Проведите діагонали въ другихъ четыреугольникахъ и многоугольникахъ).

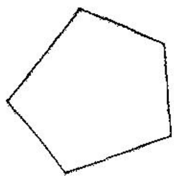
Многоугольники могутъ быть правильные и неправильные.

Черт. 81.

Черт 82



Черт. 83.

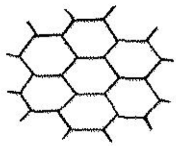


Правильнымъ многоугольникомъ (черт. 82) называется такой, въ которомъ всѣ стороны и всѣ углы равны.

Неправильнымъ многоугольникомъ (черт. 83) называется такой, въ которомъ не всѣ стороны и углы равны.

Правильные многоугольники имѣютъ весьма различное примѣненіе въ общежитіи. Настилка половъ простыхъ и паркетныхъ, многія каменныя работы, а равно мазаическія, производятся въ формѣ правильныхъ многоугольниковъ. При работахъ паркетныхъ (штучныхъ), мощеніи улицъ въ формѣ правильныхъ многоугольниковъ, а также при устройствѣ торцевой мостовой, необходимо соблюдать, чтобы всякая точка поверхности не была соединеніемъ многихъ вершинъ; при нарушеніи этого условія работа не будетъ прочна. Пчелы приготовляютъ воскъ для своихъ сотовъ въ формѣ правильныхъ шестиугольниковъ (черт. 84). Форма эта, указанная имъ самою природою, имѣетъ то преимущество, что извѣстнымъ количествомъ воску огораживается наибольшее пространство.

Черт 84



Многія постройки и памятники въ глубокой древности строили изъ огромныхъ камней въ формѣ неправильныхъ многоугольниковъ и складывали ихъ такъ, чтобы приставали камни плотно другъ къ другу;—такія строенія называются циклопскими. Постройки эти, воздвигнутыя за много лѣтъ до Р. Хр., существуютъ и по настоящее время въ Греціи, Италіи и Сициліи.

§ 24.

Сравнивая между собою правильный шестиугольникъ, семиугольникъ, осьмиугольникъ и т. д.*), мы увидимъ, что чѣмъ правильный многоугольникъ имѣетъ больше сторонъ, тѣмъ, по формѣ своей, ближе походитъ на кругъ; такъ что, взявъ, напримѣръ, стоугольникъ, стороны его будутъ такъ малы и углы до того растянуты, что его почти безошибочно можно принять за кругъ. Но всякій кругъ имѣетъ центръ, поэтому мы можемъ заключить, что всякій правильный многоугольникъ тоже долженъ имѣть свой центръ, т. е. такую точку, которая находит*ся:* 1) въ равномъ разстояніи отъ всѣхъ вершинъ угловъ

---

*) Для наглядности необходимо имѣть нѣсколько такихъ многоугольниковъ, приготовленныхъ изъ кардона или изъ дощечекъ въ 6—7 вершковъ

и 2) въ равномъ разстояніи отъ всѣхъ сторонъ многоугольника, измѣряя это разстояніе въ перпендикулярномъ направленіи (почему?). Отсюда можно заключить, что:

1) *Около всякаго правильнаго многоугольника можно описать окружность* и

2) *Во всякомъ правильномъ многоугольникѣ можно вписать окружность.*

Обратное заключеніе:

1) *Во всякомъ кругѣ можно вписать правильный многоугольникъ* и

2) *Около всякаго круга можно описать, правильный многоугольникъ* *).

Примѣчаніе 1-ое. Радіусъ круга вписаннаго въ правильномъ многоугольникѣ называется *апоѳемою.*

2-ое. Сумма всѣхъ сторонъ какого нибудь многоугольника называется его *периметромъ.*

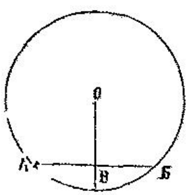
Равенство правильныхъ многоугольниковъ. Два правильные многоугольника одинаковаго числа сторонъ будутъ равны, если какія нибудь двѣ стороны у нихъ равны. (Провѣрить сказанное посредствомъ наложенія двухъ такихъ многоугольниковъ).

§ 25.

Задачи, относящіяся къ окружности.

1) *По данному радіусу провести окружность чрезъ двѣ данныя точки.*

Черт 85



Пусть данныя точки будутъ А и Б (черт. 85). Соединивъ ихъ прямою АБ, изъ средины этой прямой возставимъ перпендикуляръ. Такъ какъ всякая точка, взятая на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины прямой, равноудалена отъ концовъ ея, то, отложивъ длину даннаго радіуса отъ точки А до точки О, взятой

*) Задачи, относящіяся къ вписыванію и описыванію различныхъ правильныхъ многоугольниковъ, должны быть отнесены къ урокамъ черченія. Рѣшеніе этихъ задачъ можно заимствовать изъ «Геометрическое линейное черченіе и рисованіе, сост А Заруцкій, или изъ «Тетрадь черченія практической Геометріи, сост А Скино».

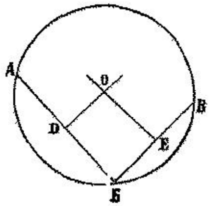
на перпендикулярѣ ВО, изъ точки О опишемъ окружность. которая и пройдетъ чрезъ данныя точки А и Б. (Придумайте практическое прмѣненіе этой задачи!)

Выводъ. Изъ рѣшенной задачи видно, что центръ окружности находится на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины хорды, и на-оборотъ: радіусъ, перпендикулярный къ хордѣ, дѣлитъ ее и соотвѣтствующую дугу пополамъ.

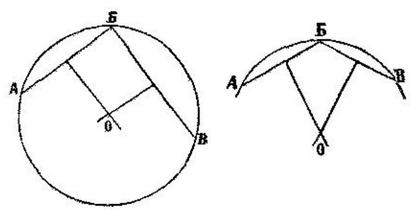
2) *Чрезъ три данныя точки, не лежащія на одной прямой, провести окружность.*

Пусть данныя точки будутъ А, Б и В (черт. 86). Соединивъ ихъ прямыми АБ и БВ, изъ средины этихъ прямыхъ возставимъ перпендикуляры ДО и ЕО, которые пересѣченіемъ своимъ дадутъ точку О—центръ требуемой окружности, потому что по предыдущему рѣшенію на обоихъ этихъ перпендикулярахъ доженъ находиться центръ окружности. Описавъ же радіусомъ ОБ окружность, мы

Черт 86.



Черт. 87.



убѣдимся, что она пройдетъ чрезъ точки А, Б и В. (Практическое примѣненіе задачи?)

Подобнымъ же образомъ описывается окружность около треугольника.

3) *Найти центръ окружности или дуги.*

Для рѣшенія задачи, нужно назначить на окружности или на дугѣ какія нибудь три точки: А, Б В (черт. 87), соединить ихъ прямыми линіями, и изъ средины получившихся хордъ возставитъ перпендикуляры, которые пересѣченіемъ своимъ дадутъ центръ дуги или окружности (Практическое примѣненіе задачи?).

VI. О подобіи фигуръ.

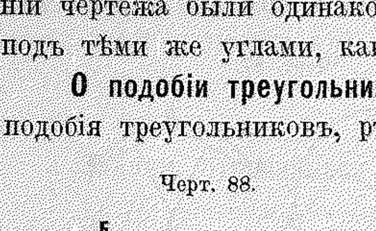
Понятіе о подобіи фигуръ.—Подобіе треугольниковъ.—Пропорціональность сторонъ въ подобныхъ треугольникахъ.—Пропорціональный циркуль.—Масштабъ линейный и поперечный.—Рѣшеніе практическихъ задачъ, основанное на подобіи треугольниковъ.—Подобіе многоугольниковъ вообще.—Подобіе правильныхъ многоугольниковъ.—Отношеніе окружности къ діаметру.—Задачи.

§ 26.

Двѣ фигуры, имѣющія одну и ту же форму или видъ, но различную величину, называются *подобными*. Чертежъ дома, въ уменьшенномъ видѣ, называемъ сходнымъ или подобнымъ тогда, когда форма и видъ его во всѣхъ частяхъ сходны съ формою и видомъ дома; а чтобы чертежъ былъ сходенъ съ домомъ, необходимо, дабы всѣ линіи чертежа были одинаково уменьшены и сходились бы подъ тѣми же углами, какъ и въ самомъ домѣ.

О подобіи треугольниковъ. Для опредѣленія условій подобія треугольниковъ, рѣшимъ слѣдующую задачу:

Черт. 88.



а) *Построить треугольникъ по двумъ даннымъ угламъ* A *и* B въ $\triangle$ $АБВ$ (черт. 88).

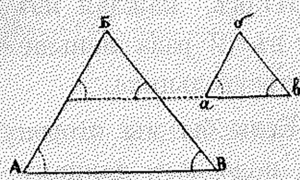
Для разрѣшенія задачи, на произвольной линіи *ав* при точкахъ *а* и *в* строимъ углы, равные даннымъ А и В, и стороны продолжаемъ до пересѣченія въ точкѣ *б*, тогда получимъ $\triangle$ абв, построенный согласно предложенному условію.

Изъ равенства угловъ А=а и <В=<в, можемъ заключить о равенствѣ <Б=<б, потому что они служатъ, каждый въ своемъ треугольникѣ, дополненіемъ до двухъ прямыхъ угловъ. Такъ какъ углы въ треугольникѣ совершенно опредѣляютъ его форму (почему? Можно ли покосить треугольникъ, когда стороны замѣнимъ прутами, соединенными шарнирами?), а построенный △ абв имѣетъ одинаковые углы съ углами △ АБВ, то форма ихъ одинакова,—стало быть, построенный треугольникъ подобенъ данному.

Отсюда можемъ заключить, что при неравенствѣ сторонъ, *если два угла одного треугольника порознь равны двумъ угламъ другаго, то такіе треугольники подобны.*

б) Кромѣ сего, при неравенствѣ сторонъ, *если три стороны одного треугольника параллельны тремъ сторонамъ другаго, то такіе треугольники тоже подобны* (черт. 89), потому что параллельныя стороны образуютъ равные углы въ обоихъ треугольникахъ, что ясно видно на чертежѣ, продолживъ сторону *ва* до пересѣченія съ БВ и АБ.

Черт. 89.

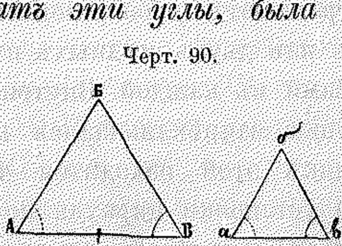


§ 27.

Пропорціональность сторонъ. Чтобы опредѣлить въ какомъ отношеніи находятся стороны въ подобныхъ треугольникахъ, рѣшимъ слѣдующую задачу:

Построить треугольникъ, подобный данному, по двумъ угламъ А и В (черт. 90), *но такъ, чтобы сторона АВ, къ которой прилежатъ эти углы, была бы уменьшена въ 2 раза.*

Черт. 90.



Для рѣшенія задачи, проводимъ линію *ав*, равную половинѣ АВ, и при тотчахъ *а* и *в* строимъ углы, равные даннымъ А и В; продолживъ стороны *аб* и *вб* до пересѣченія, получимъ △ абв, подобный данному и построенный согласно предложенному условію.

Разсмотримъ, въ какомъ отношеніи находятся стороны построеннаго треугольника къ сторонамъ даннаго. Изъ сдѣланнаго построенія мы знаемъ, что сторона *ав* въ 2 раза меньше соотвѣтствующей стороны АВ. Возьмемъ циркулемъ сгорону *аб* и отложимъ ее на АБ, тогда мы убѣдимся, что *аб* уляжется на АБ ровно 2 раза. Сдѣлавъ то же со стороною *вб*, мы увидимъ, что и *вб* въ два раза меньше ВБ.

Итакъ, каждая изъ сторонъ построеннаго треугольника въ 2 раза меньше соотвѣтствующей стороны даннаго треугольника.

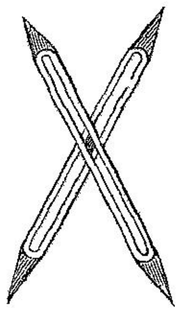
Если бы мы сторону АВ, при построеніи треугольника, подобнаго данному по двумъ угламъ, уменьшили бы въ 3, 4, 5 и т. д. разъ, то и другія двѣ стороны построеннаго треугольника были бы меньше соотвѣтствующихъ сторонъ въ данномъ въ 3, 4, 5 и т. д. разъ. Такое отношеніе сторонъ подобныхъ треугольниковъ называютъ *пропорціональностью.* Слѣдовательно, въ подобныхъ треугольникахъ стороны пропорціональны.

Отсюда выводимъ обратное заключеніе: если въ треугольникахъ *стороны пропорціональны*, то такіе треугольники подобны.

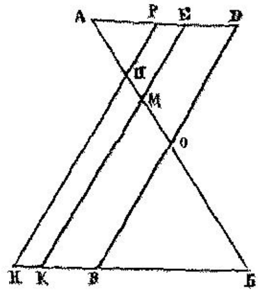
Пропорціональный циркуль. (черт. 91) На основаніи пропорціональности сторонъ въ подобныхъ треугольникахъ устраиваютъ пропорціональный циркуль, который состоитъ изъ двухъ мѣдныхъ пластинокъ съ продольными прорѣзами въ каждой. Внутри этихъ прорѣзовъ движется пластинка, закрѣпляющаяся по произволу винтомъ. На пластинкѣ этой находится черта или указатель, служащій для установки циркуля по дѣленіямъ. сдѣланнымъ на одной изъ пластинокъ и расположеннымъ такимъ образомъ.

что на самой срединѣ одной изъ ножекъ поставленъ 0 (нуль), далѣе $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ и т. д. Къ концу мѣдныхъ пластинокъ придѣланы ножки изъ хорошо закаленной стали.

Черт. 91.



Черт 92.



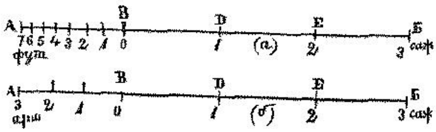
Чтобы понять теорію устройства и употребленіе пропорціональнаго циркуля, замѣнимъ ножки его двумя равными прямыми линіями АБ и ДВ (черт. 92), пересѣкающимися срединами въ точкѣ 0. Соединивъ концы этихъ линій, получимъ два треугольника АДО и ВОБ, которые будутъ равны (почему?). Изъ равенства этихъ треугольниковъ заключаемъ о равенствѣ линій АД и ВБ, которыя замѣняютъ раствореніе верхнихъ и нижнихъ ножекъ циркуля. Раздѣливъ линію АБ на 3 равныя части, черезъ точку дѣленія М проведемъ линію ЕК параллельную ДВ, тогда получимъ два подобные треугольника АЕМ и КМБ (причина подобія?). Изъ подобія этихъ треугольниковъ слѣдуетъ пропорціональность ихъ сторонъ: такъ какъ АМ составляетъ $1/2$ МБ, то и АЕ составляетъ $1/2$ КБ. Если линію АБ раздѣлимъ на 4 равныя части и черезъ точку дѣленія П проведемъ линію РН параллельную ДВ, то изъ подобія треугольниковъ АРП и НПБ можемъ заключить, что АР составляетъ $1/3$ часть НБ и т. д.

На основаніи вышеизложеннаго, если винтъ съ пластинкою передвинемъ отъ дѣленія О къ дѣленію $\frac{1}{2}$, то растворенie верхнихъ ножекъ будетъ въ два раза меньше растворенiя нижнихъ; передвинувъ указатель на пластинкѣ до дѣленiя $\frac{1}{3}$,—растворенie верхнихъ ножекъ будетъ въ 3 раза меньше растворенiя нижнихъ и т. д.

Масштабъ. Когда нужно начертить домъ, церковь, колокольню, мостъ и т. п., то эти строенiя мы чертимъ на бумагѣ въ уменьшенномъ видѣ, потому что невозможно помѣстить ихъ на плоскости бумаги въ натуральныхъ размѣрахъ. Поэтому, для отложенiя на бумагѣ линiй, пропорцiональныхъ измѣреннымъ въ натурѣ, употребляется *масштабъ*.

Самый простой масштабъ есть прямая линiя, раздѣленная на нѣсколько произвольныхъ, но равныхъ частей, какъ, напримѣръ, линiя АБ (черт. 93, а). Предположимъ, что части этой линiи АВ, ВД, ДЕ и ЕБ приняты за одну сажень, то, чтобы имѣть возможность откладывать по этому масштабу одинъ футъ, нужно АБ раздѣлить на 7 равныхъ частей, тогда каждая часть будетъ равна одному футу.

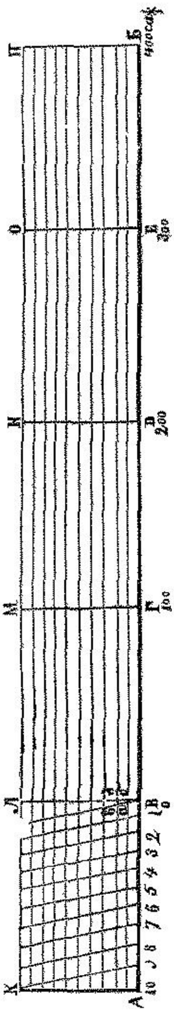
Черт. 93.



Если бы по подобному же масштабу нужно было отложить одинъ аршинъ, то линiю АВ (черт. 93, б), принятую за сажень, нужно раздѣлить на 3 равныя части, тогда каждая изъ нихъ будетъ соотвѣтствовать одному аршину.

Описанный масштабъ, называемый *линейнымъ*, употребляется преимущественно при работахъ столярныхъ и архитектурныхъ.

При землемѣрныхъ же работахъ употребляется особый масштабъ, называемый *поперечнымъ*.



Черт 94

Для построенія этого масштаба, на произвольной линіи АБ (черт. 94) откладываютъ части АВ, ВГ, ГД, ДЕ, и ЕБ, равныя одному англійскому дюйму, и изъ точекъ дѣленія возставляютъ перпендикуляры АК, ВЛ, ГМ, ДН, и т. д.; потомъ къ линіи АБ проводимъ, въ равномъ разстояніи одна отъ другой, 10 параллельныхъ линій. Наконецъ, линію АВ дѣлятъ на 10 равныхъ частей и точку К соединяютъ съ точкою дѣленія 9, а чрезъ остальныя точки дѣленія проводятъ линіи параллельныя полученной,—и масштабъ готовъ.

Положимъ, что каждая изъ частей АВ, ВГ, ГД, ДЕ и т. д., приняты за 100 саженъ, тогда каждая изъ частей АВ, которая раздѣлена на 10 равныхъ частей, будетъ заключать въ себѣ 10 саженъ. Слѣдовательно, по линіи АБ нашего масштаба можемъ брать сотни и десятки саженъ.

Чтобы уяснить себѣ, какимъ образомъ по построенному масштабу брать единицы саженъ, разсмотримъ △ РЛВ и △ абВ, которые подобны (почему?); изъ подобія же треугольниковъ, у которыхъ, какъ извѣстно, стороны пропорціональны, можемъ заключить, что *аб* составляетъ $\frac{1}{10}$ линіи РЛ, потому что Вб составляетъ $\frac{1}{10}$ ВЛ Разсмотрѣвъ треугольники РЛВ и вдВ, которые тоже подбны (почему?), мы увидимъ, что *вд* стоставляетъ $\frac{2}{10}$ линіи РЛ и т. д.

Но такъ какъ РЛ заключаетъ въ себѣ 10 саженъ, то *аб* заключаетъ 1 сажень, *вд*—2 сажени и т. д.

Чтобы по этому масштабу взять 375 саж., одну ножку циркуля ставить въ точку Е, а другую въ дѣленіе 7, находящееся на линіи АВ, и циркуль подвигаемъ вверхъ до поперечной линіи, противъ которой стоитъ цифра 5.

Описанный масштабъ называется *сотеннымъ*, потому что величина дюйма принята за 100 саженъ.

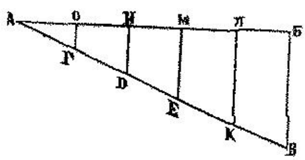
§ 28.

Задачи, рѣшаемыя на основаніи подобія треугольниковъ.

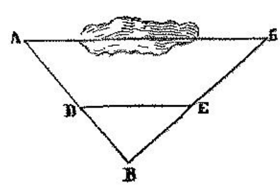
1) *Данную прямую АБ* (черт. 95) *раздѣлить на произвольное число равныхъ частей.*

Для сего къ прямой АБ подъ произвольнымъ угломъ проводимъ линію АВ, на которой отъ точки А откладываемъ столько произвольныхъ, но равныхъ частей, на сколько желаемъ раздѣлить прямую АБ. Потомъ точку В соединяемъ съ Б и къ этой линіи изъ точекъ дѣленія

Черт. 95.



Черт. 96.



К, Е, Д и т. д. проводимъ параллельныя, которыя пересѣченіемъ своимъ съ линіею АБ раздѣлятъ ее на требуемое число равныхъ частей. Что задача рѣшена вѣрно, это видно изъ треугольниковъ АОГ, АНД, АМЕ и т. д. подобныхъ $\triangle$—ку АБВ.

2) *Измѣрить линію АБ* (черт. 96), *проходящую черезъ оврагъ, озеро, болото и т. д.* (см. рѣшеніе на основаніи равенства треугольниковъ).

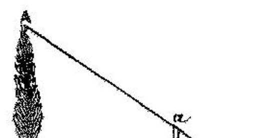
Избравъ точку В, изъ которой видны были бы А и Б, провѣшиваемъ прямыя АВ и БВ и измѣряемъ ихъ; затѣмъ на тѣхъ же линіяхъ откладываютъ, отъ точки В, какую нибудь часть всей длины линій, напр. $\frac{1}{4}$ ихъ длины, до точекъ Е и Д. Соединивъ эти точки прямою ДЕ, получимъ два подобные (почему?) треугольника АБВ и ДЕВ; а такъ какъ у нихъ стороны АВ и БВ въ 4 раза больше ДВ и ЕВ, то, измѣривъ сторону ДЕ и повторивъ ее 4 раза, получимъ длину измѣряемой линіи АБ.

3) Задачу «*измѣрить линію АБ, проходящую черезъ рѣку, если доступна только точка Б*», рѣшенную на основаніи равенства треугольниковъ, *рѣшить на основаніи подобія треугольниковъ.*

4) *Опредѣлить высоту дерева.*

Измѣряющій, въ произвольномъ направленіи и на произвольномъ разстояніи отъ дерева, ставить отвѣсно колъ *аб* (черт. 97); потомъ по направленію линіи ВБ ложится навзничь такъ, чтобы лучъ его зрѣнія проходилъ бы черезъ верхушку кола и дерева. Замѣтивъ точку исхода луча зрѣнія В и проведя мысленно линію ВА, получимъ два треугольника АБВ и абВ, которые будутъ подобны (почему?); а изъ пропорціональности сторонъ подобныхъ трегольниковъ легко опредѣлить высоту дерева: нужно только опредѣлить во сколько разъ сторона БВ больше бВ; повторивши столько же разъ высоту кола *аб*, получимъ высоту дерева.

Черт 97



Примѣръ: БВ 10 саж. | аб = $1\frac{1}{2}$ саж.

бВ = 2 саж. | АБ x

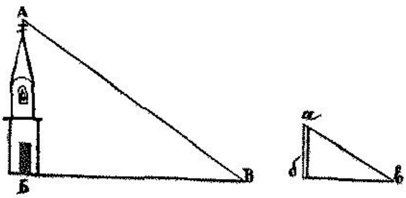
то $x = \frac{10}{2} \times 1\frac{1}{2} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ саж —высота дерева.

5) *Опредѣлить высоту колокольни по тѣни, отбрасываемой ею.*

Установивъ отвѣсно, въ сторонѣ отъ тѣни колокольни, колъ *аб* (черт. 98), измѣряемъ тѣнь колокольни и тѣнь кола *аб*. Такъ какъ длина тѣни отъ двухъ предметовъ въ одно и то же время дня пропорціональна высотѣ предметовъ, то, опредѣливши, во сколько разъ тѣнь БВ больше *бв* и повторивши столько же разъ высоту кола *аб*, получимъ высоту колокольни.

Примѣръ: БВ = 48 саж.	аб = $1\frac{3}{4}$ саж.
бв = 2 саж.	АБ = x

Черт. 98.

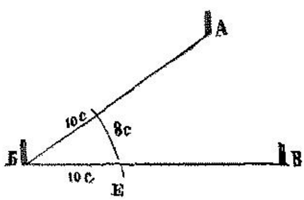


то $x = \frac{48}{2} \times 1\frac{3}{4} = 24 \times \frac{7}{4} = \frac{168}{4} = 42$ саж.—высота колокольни.

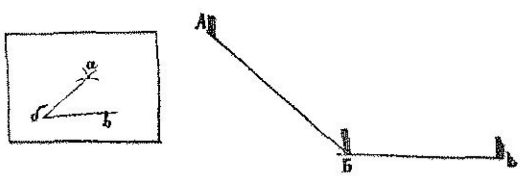
6) *Измѣрить* $< АБВ$ (черт. 99) *въ натурѣ помощью цѣпи и величину его выразить въ градусахъ.*

Отложивъ на сторонахъ БА и БВ до точекъ Д и Е по 10 саж. (или сколько угодно), измѣряемъ разстояніе

Черт. 99.



Черт. 100.



отъ точки Д до Е, которое, предположимъ, будетъ заключать 8 саженъ. Сдѣлавши на бумагѣ посредствомъ циркуля и масштаба подобное же построеніе *), получимъ < абв = < АБВ (почему?); для опредѣленія же его величины въ градусахъ остается измѣрить посредствомъ транспортира.

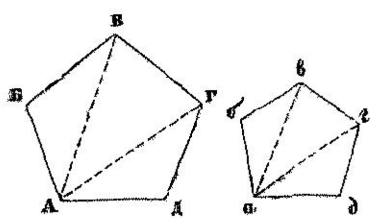
Если измѣряемый уголъ слишкомъ тупой, какъ, напримѣръ < АБВ (черт. 100), то удобнѣе измѣрить уголъ дополненія до 180^0 описаннымъ уже способомъ, потомъ опредѣлить величину его въ градусахъ и вычесть изъ 180^0, тогда получимъ величину тупаго угла АБВ въ градусахъ.

§ 29.

О подобіи многоугольниковъ вообще. Чтобы вывести условіе подобія многоугольниковъ, рѣшимъ слѣдующую задачу.

Построить многоугольникъ въ уменьшенномъ противъ даннаго АБВГД (черт. 101) *видѣ, разбивъ его изъ вершины одного угла діагоналями на треугольники.*

Черт. 101.



Для рѣшенія задачи строимъ сперва △ агд подобный △ АГД (какимъ образомъ?), потомъ △ авг подобный △ АВГ, и наконецъ △ абв подобный △ АБВ. Такъ какъ оба многоугольника состоятъ изъ одинаковаго числа подобныхъ и одинаково расположенныхъ треугольниковъ, то эти многоугольники будутъ подобны,—потому что, если части цѣлыхъ подобны, то и самыя цѣлыя тоже подобны.

---

*) Построеніе это дѣлается такъ на произвольной прямой откладываемъ по масштабу линію бв=10 саж. (черт. 100), потомъ изъ точки *б* радіусомъ въ 10 саж. описываемъ дугу и изъ точки *в* радіусомъ въ 8 саж. описываемъ другую дугу,—пересѣченіе этихъ дугъ дастъ намъ точку *а* и вмѣстѣ съ тѣмъ <абв.

Поэтому, *всякіе два многоугольника, состоящіе изъ одинаковаго числа подобныхъ и одинаково расположенныхъ треугольниковъ, будутъ подобны.*

Изъ пропорціональности сторонъ подобныхъ треугольниковъ, составляющихъ два подобныхъ многоугольника, можемъ заключить, что *соотвѣтственныя стороны подобныхъ многоульниковъ тоже пропорціональны.*

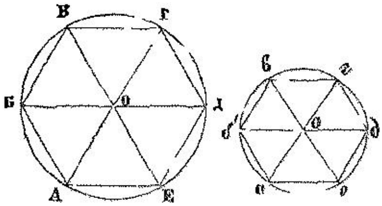
§ 30.

Подобіе правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ и отношеніе окружности къ діаметру. Такъ какъ въ правильныхъ многоугольникахъ всѣ стороны и углы равны между собою, то два правильные многоульника одинаковаго числа сторонъ, если не равны между собою, то непремѣнно подобны одинъ другому, потому что отношеніе между сторонами такихъ многоугольниковъ будетъ одно и то же.

Если соотвѣтственныя стороны подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны, то и отношеніе суммы всѣхъ сторонъ, т. е. периметра, каждаго изъ многоугольниковъ къ какимъ нибудь сходственнымъ сторонамъ будетъ тоже одинаково;—слѣдовательно, *периметры подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны сходственнымъ сторонамъ.*

Если изъ центровъ двухъ правильныхъ подобныхъ многоугольниковъ АБВГДЕ и абвгде (черт. 102) проведемъ радіусы къ вершинамъ угловъ, то многоугольники раздѣлятся на одинаковое число подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ треугольниковъ. Изъ пропорціональности сторонъ этихъ треугольниковъ можемъ заключить, что радіусы круговъ, описанныхъ АО,

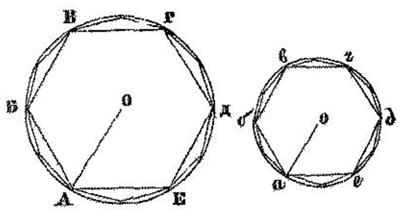
Черт. 102.



БО, ВО и т. д. и *ао, бо, во* и т. д., пропорціональны сторонамъ АБ, БВ, ВГ и т. д. и *аб, бв, вг* и т. д.; а такъ какъ сходственныя стороны подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны периметрамъ, то, стало быть, *периметры правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ пропорціональны радіусамъ круговъ описанныхъ.*

Увеличивая постепенно число сторонъ двухъ правильныхъ подобныхъ многоугольниковъ, отчего стороны будутъ дѣлаться все меньше, мы увидимъ, что разность между периметрами этихъ многоугольниковъ и *окружностями* будетъ постепенно уменьшаться. Такъ, напримѣръ, замѣнивъ вписанный 6-ти угольникъ— 12-тиугольникомъ, 12-тиугольникъ —24-хъугольникомъ, 24-хъугольникъ—48-миугольникомъ, а 48-миугольникъ—96-тиугольникомъ (черт. 103), разность между периметромъ 96-тиугольника и окружностью будетъ такъ незначительна, что безъ всякой погрѣшности окружность можемъ разсматривать, какъ периметръ правильнаго многоугольника *безчисленнаго множества сторонъ.* Зная же, что периметры правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ пропорціональны радіусамъ круговъ описанныхъ, можемъ заключить, что *окружности пропорціональны радіусамъ или діаметрамъ.*

Черт 103.

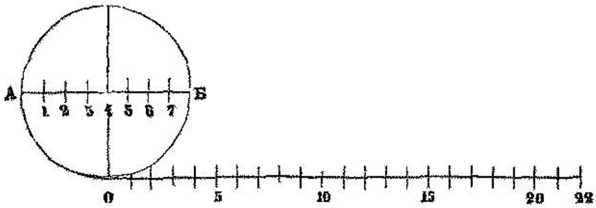


Знаменитый геометръ Архимедъ, жившій въ третьемъ столѣтіи до Р. Хр., занимаясь вычисленіемъ отношенія окружности къ діаметру, нашелъ, что оно равняется $3\frac{1}{7}$ или $\frac{22}{7}$,—точнѣе, какъ нашли впослѣдствіи, $\frac{355}{113}$, а еще точнѣе 3,14159 ......

Предпослѣдній выводъ весьма легко удерживается въ памяти; слѣдуетъ написать сряду три первыя нечетныя цифры, каждую по два раза, тогда получимъ 113355. Отдѣливъ послѣднія три цифры для числителя, первыя три принимаемъ за знаменателя.

Выпрямивъ окружность въ прямую линію (черт. 104), мы

Черт. 104.



увидимъ что если діаметръ заключаетъ въ себѣ 7 извѣстныхъ мѣръ. то полученная прямая линія будетъ заключать 22 такихъ же мѣръ; стало быть, діаметръ заключается въ своей окружности $\frac{22}{7}$ или $3\frac{1}{7}$ раза. (Повѣрить этотъ выводъ помощію проволоки, обтянувъ ею правильный деревянный кругъ и выпрямивъ ее въ прямую линію.)

Отношеніе окружности къ діаметру обыкновенно обозначаютъ греческою буквою π (пи). Обозначивъ окружность буквою О, а радіусъ буквою *р*. найдемъ, что

$$\frac{O}{2p} = \pi$$

Но дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, стало быть: $O = 2p \times \pi$, или, какъ чаще говорятъ,

$$O = 2\,\pi \times p.$$

Слѣдовательно, чтобы величину окружности выразить въ линейной мѣрѣ, нужно удвоенную величину π умножить на величину радіуса.

Примѣръ. Если радіусъ $= 21$ футу,

то окружность $= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 = 132$ ф.

§ 31.

Рѣшите слѣд. задачи:

1) Діаметръ стола равенъ 1 арш. 12 верш.; чему равна окружность?

2) Окружность круга равна 42 футамъ; какъ великъ діаметръ и радіусъ?

3) Колесо повозки имѣетъ въ діаметрѣ 1 арш 3 верш.; какой длины должна быть шина для *оковки* колеса?

4) Столяру заказанъ кругый столъ на 12 особъ; какъ великъ радіусъ стола, если на каждаго человѣка полагаютъ 1 футъ 10 дюймовъ мѣста?

5) Колесо машины имѣетъ 60 зубцовъ. Какъ великъ діаметръ колеса, если толщина каждаго зубца равна 4 линіямъ, а величина промежутковъ 3 линіи?

6) Если радіусъ круга равенъ 8 аршинамъ, то чему равна длина дуги въ 40°?

7) Какъ великъ экваторъ, если земной радіусъ равенъ 860 географ. милямъ?

8) Зная, что градусъ экватора заключаетъ 15 географическихъ миль, опредѣлить радіусъ экватора.

9) Опредѣлить окружность луны, когда извѣстно, что діаметръ ея равенъ 468 географ. милямъ.

10) Сколько оборотовъ сдѣлаетъ колесо на протяженіи 328 саж., если діаметръ его равенъ 4 футамъ?

11) Колесо *сдѣлало* 728 *оборотовъ*. Сколько саженъ прошло колесо, если радіусъ его равенъ 1,5 фута?

12) Колесо, котораго діаметръ 28 футовъ, должно имѣть 120 зубцовъ, толщиною въ 4 дюйма каждый. Опредѣлить разстояніе между зубцами.

13) Если наружная окружность круглой башни равна 24 саж., а внутренняя 18 саж., то чему равна толщина стѣны.

VII. Вычисленіе площадей.

Понятіе о квадратныхъ мѣрахъ.—Простѣйшій способъ измѣренія площадей.—Измѣреніе площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеціи.—Измѣреніе площади неправильнаго многоугольника.—Площадь правильнаго многоугольника и круга.—Площадь сектора и сегмента.—Задачи на вычисленіе площадей.

§ 32.

Площадью называется часть плоскости, ограниченной со всѣхъ сторонъ линіями.

Для измѣренія площадей употребляются мѣры, называемыя *квадратными*.

Если на листѣ бумаги начертимъ квадратъ и вырѣжемъ его, то этотъ квадратъ будетъ представлять собою *квадратную площадь*.

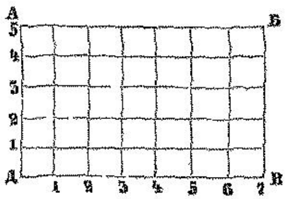
Всѣ мѣры поверхности суть подобныя квадратныя площади и различаются между собою только длиною сторонъ. Если каждая сторона квадрата равна аршину, то такая квадратная площадь называется *квадратнымъ аршиномъ;* если каждая сторона квадрата будетъ равна сажени, то такая квадратная площадь называется *квадратною саженью* и т. д.

Чтобы измѣрить какую нибудь площадь, напримѣръ, площадь класснаго пола, нужно накладывать на полъ какую нибудь квадратную мѣру, напримѣръ квадратный аршинъ, и считать, сколько разъ онъ уляжется на поверхности пола; если квадратный аршинъ улегся 80 разъ, то площадь пола равна 80-ти квадратнымъ аршинамъ.

Но подобное измѣреніе площадей, кромѣ своей неточности, не всегда удобно произвести, особенно когда единица мѣры не уляжется по длинѣ или ширинѣ пола полное число разъ. Поэтому величину площади находятъ обыкновенно посредствомъ вычисленій, для чего измѣряютъ предварительно линіи, отъ которыхъ зависитъ величина площади измѣряемой фигуры.

Чтобы уяснить себѣ, отъ какихъ линій зависитъ величина площади прямоугольника АБВД (черт. 105), измѣримъ сторону ДВ и положимъ, что линейный аршинъ улегся по ней 8 разъ; проведя снизу вверхъ линіи параллельныя АД, мы получимъ 8 полосъ, шириною каждая изъ нихъ въ 1 аршинъ. Измѣримъ сторону АД и положимъ, что линейный аршинъ улегся по ней 5 разъ; проведя слѣва вправо линіи параллельныя ДВ, мы получимъ 5 полосъ, ширина которыхъ, каждой отдѣльно, равна 1-му аршину, а длина содершитъ 8 аршинъ,—слѣдовательно во всемъ прямоугольникѣ будетъ $5 \times 8 = 40$ аршинъ.

Черт 105

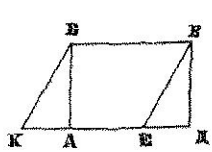


Изъ этого легко видѣть, что для опредѣленія площади прямоугольника АБВД, вмѣсто непосредственнаго измѣренія квадратнымъ аршиномъ, достаточно измѣрить линейнымъ аршиномъ (что выполняется легко) двѣ его стороны: основаніе и высоту, произведеніе же длины этихъ сторонъ дастъ площадь прямоугольника. Итакъ, *площадь прямоугольника измѣряется произведеніемъ основанія на высоту.*

Примѣръ. Если основаніе прямоугольника $= 5^1/_2$ арш.,
а высота » $= 4^3/_4$ арш.,
то площадь его $= 5\frac{1}{2} \times 4\frac{3}{4} = \frac{11}{2} \times \frac{19}{4} = \frac{209}{8} = 26\frac{1}{8}$ = кв. ар.

Если въ прямоугольникѣ АБВД (черт. 106) изъ вершины угла В отрѣжемъ $\triangle$ ВДЕ и приложимъ его стороною ВД къ АБ, то прямоугольникъ АБВД замѣнится совершенно равнымъ

Черт. 106

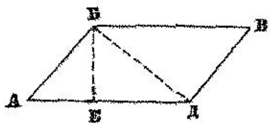


ему параллелограммомъ КБВЕ. А такъ какъ площадь прямоугольника измѣряется произведеніемъ основанія на высоту, то и *площадь параллелограмма измѣряется произведеніемъ основанія на высоту.*

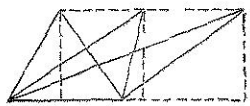
Примѣчаніе. Фигуры, различныя по формѣ, но одинаковыя по величинѣ площадей, называются *равномѣрными.* Въ данномъ случаѣ прямоугольникъ АБВД равномѣренъ параллелограмму КБВЕ (черт. 106).

Если въ параллелограммѣ АБВД (черт. 107) проведемъ діагональ БД, то параллелограммъ раздѣлится на два равные треугольника (почему?— доказать). Но площадь параллелограмма измѣряется произведеніемъ основанія на высоту, слѣдовательно площадь треугольника будетъ равна половинѣ площади параллелограмма, потому что треугольникъ составляетъ половину параллелограмма.

Черт 107.



Черт. 108.

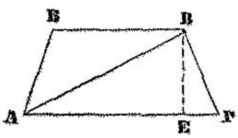


Итакъ, *чтобы опредѣлить площадь треугольника, нужно взять половину основанія и умножить на высоту, или же основаніе умножить на половину высоты.*

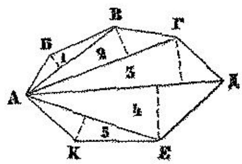
Всѣ треугольники, имѣющіе одинаковое основаніе и одинаковую высоту, будутъ равномѣрны между собою, потому что площади ихъ будутъ одинаковы. (Разсмотрѣть и убѣдиться наглядно въ сказанномъ на черт. 108).

Для опредѣленія площади трапеціи АБВГ (черт. 109), проведемъ діагональ АВ, тогда трапеція раздѣлится на два треугольника, изъ которыхъ у одного основаніемъ будетъ сторона АГ, а у другало БВ, высота же ВЕ общая обоимъ треугольникамъ (почему?). Такъ какъ площадь каждаго изъ треугольниковъ измѣряется произведеніемъ половины основанія на высоту, то площадь трапеціи АБВГ, которая составляетъ сумму обоихъ треугольниковъ, будетъ измѣряться произведеніемъ полусуммы параллельныхъ сторонъ на высоту.

Черт. 109.



Черт. 110



Итакъ, *площадь трапеціи измѣряется произведеніемъ полусуммы параллельныхъ сторонъ на высоту.*

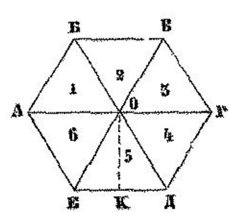
(Какимъ образомъ вычислить количество гонты, потребной для крыши училищнаго дома)?

Для измѣренія площади неправильнаго многоугольника АБВГДЕК (черт. 110), нужно разбить его діагоналями изъ одного какого нибудь угла на треугольники, опредѣлить отдѣльно площадь каждаго изъ треугольниковъ и найденные результаты сложить; тогда сумма площадей всѣхъ треугольниковъ дастъ площадь неправильнаго многоугольника.

§ 33.

Площадь правильнаго многоугольника и круга. Чтобы опредѣлить площадь правильнаго многоугольника АБВГДЕ (черт. 111), изъ центра О проведемъ радіусъ къ вершинамъ угловъ, тогда многоугольникъ раздѣлится на 6 равныхъ треугольниковъ (причина равенства?). Но площадь одного треугольника напримѣръ $\triangle$ ЕОД, равна произведенію половины основанія на высоту,—слѣдовательно, повторивъ площадь $\triangle$ ЕОД 6 разъ,

Черт. 111.



получимъ площадь всего правильнаго многоугольника. Но такъ какъ основанія и высоты равны во всѣхъ получившихся треугольникахъ (почему?), то, сложивъ основанія ДЕ+ЕА+АБ+БВ и т. д. и умноживъ на половину апоѳемы ОК, получимъ площадь того же многоугольника. Сумма же сторонъ ДЕ+ЕА+АБ+БВ и т. д. составляетъ периметръ правильнаго многоугольника, стало быть, *площадь правильнаго многоугольника измѣряется произведеніемъ его периметра на половину апоѳемы.*

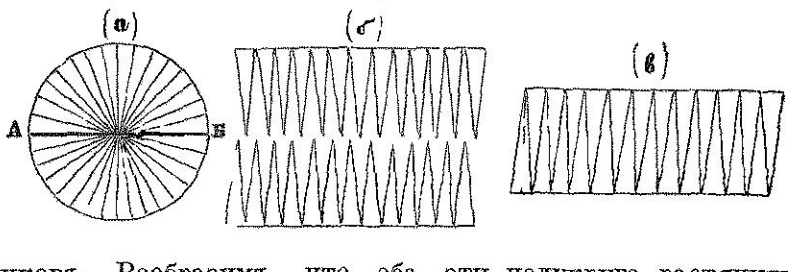
Мы уже знаемъ, что окружность можно разсматривать, какъ периметръ правильнаго многоугольника безчисленнаго множества сторонъ; отсюда можемъ заключить, что *площадь круга измѣряется произведеніемъ его окружности на половину радіуса*, потому что периметръ правильнаго многоугольника переходитъ въ окружность, а апоѳема—въ радіусъ круга.

Поэтому площадь круга $= 2\pi р \times \frac{р}{2} = \pi р \times р = \pi р^2$.

Выраженіе $\pi р^2$ (пи эръ квадратъ) обыкновенно употребляютъ для обозначенія площади круга.

Чтобы еще нагляднѣе убѣдиться въ доказанной истинѣ, что площадь круга равна $\pi р^2$, проведемъ въ кругѣ (черт. 112, а) діаметръ АБ и оба получившіеся полукруга раздѣлимъ на нѣсколько маленькихъ равныхъ между собою треуголь-

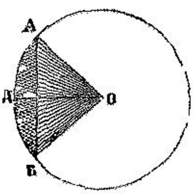
Черт 112



никовъ. Вообразимъ, что оба эти полукруга растянуты, какъ показано на черт. б, 112, тогда получимъ фигуры на подобіе зубцовъ пилы. Сблизивъ эти фигуры такъ, чтобы зубцы верхней уперлись въ основаніе зубцовъ нижней (черт. 112, в), мы получимъ параллелограммъ. Разсмотрѣвъ внимательно его основаніе и высоту, легко замѣтить, что основаніе равняется половинѣ всей окружности (т. е. $\pi р$), а высота—радіусу ея (т. е $р$). Но площадь параллелограмма измѣряется произведеніемъ основанія на высоту (т. е. $\pi р \times р$); а такъ какъ площадь получившагося параллелограмма равномѣрна площади круга, то, стало быть, *площадь круга равна* $\pi р^2$.

Примѣръ. Если радіусъ окружности 14 футовъ,
то окружность $= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 = 88$ футовъ,
а площадь круга $= 88 \times 7 = 616$ квадр. фут.
или по выраж. $\pi р^2 = \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616$ квадр. фут.

Черт. 113



Для опредѣленія площади *сектора* АОБД (черт. 113), нужно опредѣлить, какую часть окружности составляетъ дуга АДБ,—такую же часть площади круга будетъ составлять секторъ АОБД Если дуга АБД $= \frac{1}{5}$ окружности, то и площадь сектора АОДБ будетъ равна $\frac{1}{5}$ площади круга. Чтобы опредѣлить площадь *сегмента* АБД (черт. 113), нужно найти разность между площадью сектора АОБД и площадью треугольника АБО,—эта разность выразитъ площадь сегмента АБД.

§ 34.

Рѣшите слѣдующія задачи:

1) Сторона квадрата равна 8 аршинамъ Опредѣлить его площадь.

2) Площадь прямоугольника равна 96 кв. ар.; а основаніе 6 ар. Чему равна высота его?

3) Сумма двухъ сторонъ квадрата составляетъ 9,5 саж.

Вычислить его площадь.

4) Сумма всѣхъ сторонъ квадрата равна 64 аршинамъ. Какъ велика площадь?

5) Огородъ имѣетъ форму прямоугольника длиною въ 15 саж. 6 фут., а шириною въ $6^4/_7$ саж. Опредѣлить его площадь.

6) Длина комнаты 34 фута, ширина 26 фут. Сколько потребуется досокъ на полъ этой комнаты, если длина доски 16 футовъ, а ширина $^3/_4$ фута?

7) Комната имѣетъ 12 ар. длины, 8 ар. ширины и 6 ар. высоты. Сколько аршинъ шпалера, шириною 0,75 арш., потребуется для оклейки такой комнаты, если въ ней 3 окна въ 2 аршина вышины и $1^1/_4$ арш. ширины и дверь въ $3^1/_6$ арш. вышины и $1^3/_4$ арш. ширины?

8) Садъ, прямоугольнаго вида, имѣетъ въ длину 38,6 саж., а ширина 31,2 саж. Какъ велика площадь собственно сада, если съ 2-хъ сторонъ и посрединѣ его въ длину проведены дорожки шириною въ 4,8 аршина?

9) Площадь прямоугольнаго сада равна 1 десят. 1800 кв. саж. Какъ велика ширина его, если длина равна $52^1/_2$ саж.?

10) Длина параллелограмма 8 арш., а высота 5 арш.; чему равна его площадь?

11) Площадь ромба равна 673,68 квадр. фут. Какъ великъ бокъ этого ромба, если высота его содержитъ 12,4 фута?

12) Участокъ земли имѣетъ форму трапеціи, которой параллельныя стороны составляютъ $37^1/_2$ и 29,4 саж., а ширина 27 аршинъ. Какъ велика его площадь?

13) Если основаніе треугольника заключаетъ 9 фут. и 4 дюйма, а высота 6 фут. 8 дюймовъ, то чему равна его площадь?

14) Если площадь треугольника равна 2268 □ арш., то какъ велика его высота, когда основаніе равно 54 арш.?

15) Мальчикъ насадилъ клумбу въ формѣ треугольника, котораго основаніе равно 9 арш., а высота 8 арш. Отецъ

предложилъ ему на слѣдующую весну замѣнить треугольную форму клумбы квадратомъ, котораго бы площадь равнялась площади треугольника. Опредѣлить основаніе квадрата!

16) Чему равна площадь круга, котораго діаметръ равенъ 36 аршинамъ?

17) Чему равна площадь круга, котораго окружность равна 352 дюймамъ?

18) За круглый столъ могутъ усѣсться 12 человѣкъ, полагая на каждаго 2 фута мѣста. Какъ велика площадь стола?

19) Если радіусъ круга 12 фут., то чему равна площадь полукруга?

20) Клумбу, которой радіусъ 7 футовъ, замѣнить равномѣрнымъ кругу прямоугольникомъ, котораго основаніе 14 футовъ. Найти высоту.

21) Сколько пойдетъ квадратовъ дубоваго дерева, каждый шириною въ 4 вершка, на настилку пола въ комнатѣ, длина которой 15 аршинъ, а ширина 8 арш.?

22) Для окраски 12 подоконниковъ, имѣющихъ форму трапецій нанятъ работникъ съ условіемъ платить ему по 6 коп. сер. за окраску каждаго квадратнаго аршина. Сколько слѣдуетъ заплатить за всю работу, если параллельныя стороны трапецій имѣютъ 1 арш. 14 верш. и 2 арш. 2 верш., а ширина 10 вершковъ?

23) Для настилки пола, длиною 18 аршинъ и шириною 5 саж., куплено 54 доски, длиною 3 сажени и шириною 6 вершковъ каждая. Сколько еще нужно прикупить такихъ же досокъ?

24) Сколько желѣзныхъ листовъ квадратной формы, длиною въ 1 арш. 2 верш. каждый, потребуется еще на крышу, состоящую изъ двухъ равныхъ трапецій, параллельныя стороны которыхъ 9 и 10 саж., а высота 9 арш., и двухъ равныхъ треугольниковъ, у которыхъ основанія по

5 саж., а высота также 9 аршинъ, если уже куплено 500 листовъ?

25) Вычислить площадь какого нибудь неправильнаго многоугольника, разбивъ его на произвольныя треугольныя и правильныя четыреугольныя фигуры.

26) Построить кругъ, котораго площадь составляла бы половину площади даннаго круга.

27) На данной линіи построить треугольникъ равновеликій суммѣ двухъ данныхъ прямоугольниковъ.

28) Построить квадратъ равновеликій суммѣ данныхъ площадей: треугольника, параллеограмма, трапеціи и правильнаго шестиугольника.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

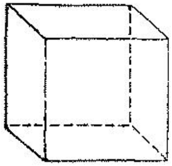
Б. ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

I. Наглядное ознакомленіе съ кубомъ, призмою, пирамидою, цилиндромъ, конусомъ и шаромъ.

§ 35.

До сихъ поръ, разсматривая и изучая свойства точекъ, линій и фигуръ, мы предполагали ихъ находящимися на одной плоскости, почему предыдущій отдѣлъ геометріи имѣетъ названіе *геометріи на плоскости*. Теперь мы перейдемъ къ *геометріи въ пространствѣ*, т. е. къ той части геометріи, гдѣ разсматриваемыя точки и линіи лежатъ на разныхъ плоскостяхъ и самыя плоскости имѣютъ различное положеніе.

Черт. 114.



Предварительно ознакомимся съ формою геометрическихъ тѣлъ, которыя будемъ изучать, и ихъ частями.

Кубъ. Представленный на чертежѣ 114 кубъ, равно какъ и всякій другой, имѣетъ: а) 6 боковыхъ граней (поверхностей), б) 12 угловъ двугранныхъ, т. е. образованныхъ двумя гранями *). в) 8 угловъ трегранныхъ, т. е. образованныхъ тремя гранями, и г) 12 ре-

*) Для наглядного ознакомленія съ двугранными и трегранными углами, указать на таковые въ классной комнатѣ. Здѣсь же разсмотрѣть перпендикулярныя и параллельныя плоскости (прилежащія и противолежащія стѣны класса).

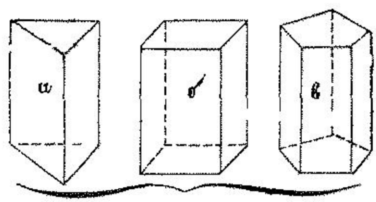
беръ, т. е. прямыхъ линій, обозначающихъ пересѣченіе двухъ плоскостей. (Показать всѣ эти части на модели куба и на его чертежѣ).

Всѣ грани куба суть одинаковой величины квадратныя плоскости, поэтому кубомъ называется геометрическое тѣло, ограниченное шестью одинаковыми квадратными плоскостями, сходящимися подъ прямыми углами.

§ 36.

Призма. Призмою называется тѣло, ограниченное съ боковъ прямоугольниками, а сверху и снизу равными и параллельными между собою плоскостями (черт. 115). Поверхность, на которой призма стоитъ называютъ *основаніемъ нижнимъ,* въ отличіе отъ верхей поверхности, которую называютъ *основаніемъ верхнимъ.*

Черт. 115.



Если основаніями призмы — треугольники, то боковыхъ граней у ней три и призма называется трегранною (черт. 115, а); если въ основаніяхъ призмы четыреугольники, то боковыхъ граней четыре и призма называется *четырегранною* (черт. 115,б); а если въ основаніяхъ призмы многоугольники, то призма называется *многогранною* (черт. 115, в).

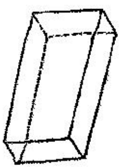
Сумма всѣхъ боковыхъ граней призмы называется ея *боковою* поверхностью; сумма же всѣхъ граней призмы вмѣстѣ съ основаніями составляетъ всю поверхность призмы.

(Показать въ призмахъ трегранной, четырегранной и многогранной число всѣхъ граней, двугранныхъ и трегранныхъ угловъ, а также и реберъ. Назвать нѣсколько предметовъ призматической формы.)

Призма, у которой въ основаніяхъ правильный многоугольникъ, называется *правильною*; въ противномъ же случаѣ она называется *неправильною*.

Если боковыя ребра призмы перпендикулярны основаніямъ, то она называется *прямою* (черт. 115, а, б, в); въ противномъ же случаѣ—*наклонною* (черт. 116).

Черт. 116.



Высотою призмы называется перпендикуляръ, проведенный изъ какой нибудь точки верхняго основанія на нижнее.

Призма, у которой въ обоихъ основаніяхъ параллелограммы, называется *параллелопипедомъ*.

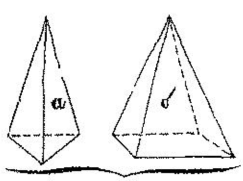
§ 37.

Пирамида. Пирамидою называется тѣло, ограниченное *снизу какою нибудь плоскою* прямолинейною фигурою, а съ боковъ треугольными гранями, которыя сходятся въ одной точкѣ, называемой вершиною пирамиды.

Поверхность, на которой покоится пирамида, называется ея *основаніемъ*.

По числу сторонъ основанія, пирамиды бываютъ: *трегранныя, четырегранныя и многогранныя* (черт. 117, а, б).

Черт. 117.



Сумма всѣхъ боковыхъ граней пирамиды называется ея *боковою поверхностью;* сумма же всѣхъ боковыхъ граней и основанія составляетъ *всю поверхность* пирамиды.

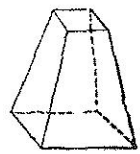
(Показать въ пирамидахъ трегранной, четырегранной и многогранной число всѣхъ граней, двугранныхъ, трегранныхъ и многогранныхъ угловъ, а также реберъ. Назвать нѣсколько предметовъ, похожихъ на пирамиду.)

Пирамида, у которой въ основанiи правильный многоугольникъ и всѣ боковыя ребра равны между собою, называется *правильною.*

Перпендикуляръ, проведенный изъ вершины пирамиды на основанiе, называется *высотою* пирамиды. (Опредѣлить мѣсто основанiя высоты въ правильной пирамидѣ.) Перпендикуляръ же, проведенный на какой нибудь боковой грани пирамиды и выражающiй разстоянiе стороны основанiя отъ вершины пирамиды, называется *апоѳемою.*

Кромѣ указанныхъ пирамидъ, которыя можно назвать остроконечными, бываютъ пирамиды съ усѣченною параллельно основанiю верхушкою,—такiя пирамиды называются усѣченными (черт. 118).

Черт. 118

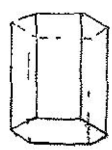


Стало быть, усѣченною пирамидою называется геометрическое тѣло, ограниченное снизу и сверху двумя параллельными и подобными прямолинейными фигурами, а боковая поверхность состоитъ изъ трапецiй. (Назвать нѣсколько предметовъ, имѣющихъ форму усѣченной пирамиды).

§ 38.

Цилиндръ. Если въ правильной шестигранной призмѣ, представленной на черт. 119, число реберъ постепенно удваивать, срѣзывая существующiя уже ребра, тогда шестигранная призма замѣнится 12-тигранною, 12-тигранная—24-хъгранною и т. д. Очевидно. чѣмъ больше будетъ граней, тѣмъ грани будутъ дѣлаться меньше и ребра, напримѣръ въ 96-тигранникѣ, будутъ сливаться съ гранями въ одну круглую поверхность,

Черт. 119



называемую цилиндрическою, а сама призма превратится въ *цилиндръ.*

Поэтому цилиндромъ называется тѣло, имѣющее сверху и снизу два равныхъ и параллельныхъ другъ другу круга, а съ боковъ круглую поверхность.

Черт. 120.

Кромѣ сего, цилиндръ можно разсматривать, какъ тѣло, происходящее отъ вращенія прямоугольника около одной изъ сторонъ (черт. 120). (Для наглядности, попробуйте вращать линейку въ горшкѣ съ масломъ,—что тогда получится?)— Неподвижная сторона АБ (черт. 120), около которой вращается прямоугольникъ, называется *осью* цилиндра,—она соединяетъ центры обоихъ круговъ.

Сторона прямоугольника, противолежащая оси и образующая при вращеніи цилиндрическую поверхность, называется *образующею линіею.*

Оба круга цилиндра называются его *основаніями*, одно верхнимъ, а другое—нижнимъ.

Перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки верхняго основанія на нижнее, называется *высотою* цилиндра.

Высота прямаго цилиндра, ось его и образующая линія всегда равны между собою (почему?).

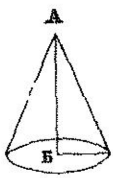
(Назвать нѣсколько предметовъ цилиндрической формы. Показать наглядно на цилиндрѣ изъ свекловицы форму разрѣзовъ: 1) параллельнаго оси, 2) параллельнаго основанію и 3) непараллельнаго основанію,—наискось).

Кромѣ прямаго цилиндра, бываютъ *наклонные.* Нѣсколько монетъ одинаковыхъ, положенныхъ одна на другую представляютъ прямой цилиндръ; покосивъ же равномѣрно монеты въ одну какую нибудь сторону, получимъ наклонный цилиндръ.

§ 39.

Конусъ. Подобно тому, какъ цилиндръ мы разсматривали, какъ призму безчисленнаго множества граней, конусъ тоже можемъ разсматривать, какъ пирамиду безчисленнаго множества граней. Кромѣ сего, конусъ можемъ разсматривать какъ тѣло, происшедшее отъ вращенія прямоугольнаго треугольника около одного изъ катетовъ. (Попробуйте вращать прямоугольный треугольникъ около одного изъ катетовъ въ тѣстѣ изъ глины. Объяснить образованіе конуса на гимнастическомъ упражненіи—«гигантскіе шаги»).

Черт 121.



Конусомъ называется геометрическое тѣло, имѣющее въ основаніи кругъ, а съ боковъ кривую поверхность, суживающуюся кверху до заостренія.

Неподвижная сторона АБ (черт. 121), около которой вращается прямоугольный треугольникъ, называется *осью конуса*;—она соединяетъ его вершину съ центромъ основанія. Гипотенуза, образующая конусообразную поверхность, называется *образующею линіею.*

Кругъ, на которомъ конусъ стоитъ, называется его *основаніемъ.* Перпендикуляръ, проведенный изъ вершины конуса на его основаніе, называется *высотою конуса.* Въ прямомъ конусѣ ось и высота равны другъ другу.

(Назвать нѣсколько конусообразныхъ предметовъ. Какія корневыя овощи имѣютъ конусообразную форму?).

Если ось конуса перпендикулярна основанію, то конусъ называется *прямымъ*, въ противномъ же случаѣ—*наклоннымъ*. (Начертите наклонный конусъ).

§ 40.

Шаръ. Возьмемъ мѣдный пятачекъ, поставимъ его ребромъ на гладкомъ столѣ и, придерживая сверху пальцемъ, ударомъ пальца другой руки заставимъ его быстро повернуться около своего діаметра, тогда, отъ вращенія обѣихъ полукружностей пятачка, вмѣсто плоской монеты намъ покажется *шарикъ.* Такой точно шарикъ произошелъ бы и отъ вращенія одной полуокружности около ея діаметра. если бы во время вращенія она сохранила устойчивость. Такъ какъ всѣ точки окружности пятачка равно удалены отъ центра его, то всѣ точки шаровой поверхности тоже равно удалены отъ центра шара.

Шаромъ называется тѣло, ограниченное такою кривою сомкнутою поверхностью, что всѣ ея точки находятся въ равномъ разстояніи отъ одной внутренней точки, называемой центромъ.

Черт. 122

Прямая, соединяющая центръ шара съ одною изъ точекъ его поверхности, называется *радіусомъ шара.*

Прямая, соединящая двѣ точки поверхности шара и проходящая черезъ центръ, называется *діаметромъ шара.*

Отличительное свойство шара состоитъ въ томъ, что всякое сѣченіе, сдѣланное въ какомъ бы то ни было направленіи, есть кругъ. Кругъ, получающійся отъ сѣченія шара плоскостью, проходящею черезъ центръ его. называется *большимъ кругомъ.* Всѣ большіе круги одного и того же шара равны между собою.

(Указать большіе круги на глобусѣ. Назвать нѣсколько шаровидныхъ предметовъ.)

II. Измѣреніе поверхности геометрическихъ тѣлъ.

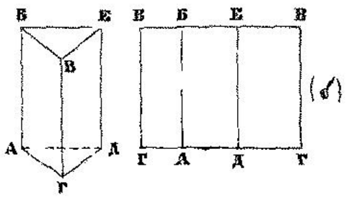
Опредѣленіе поверхности куба.—Боковая и полная поверхность призмы прямой и наклонной.—Боковая и полная поверхность цилиндра прямаго и наклоннаго.—Боковая и полная поверхность пирамиды полной и усѣченной параллельно основанію.—Боковая и полная поверхность конуса цѣльнаго и усѣченнаго.—Поверхность шара.—Задачи.

§ 41.

Въ общежитіи встрѣчается много предметовъ, имѣющихъ форму призмы, какъ напримѣръ: комната, большая часть домовъ, шкафъ, ящикъ, граненый карандашъ и т. п., и очень часто представляется нужда въ опредѣленіи ихъ поверхности. Нужно-ли выклеить комнату шпалеромъ, выкрасить-ли ее, или выбѣлить, всегда приходится опредѣлять поверхность призмы, какъ для опредѣленія количества матеріала, требуемаго для той или другой работы, такъ равно и для опредѣленія стоимости ея съ матеріаломъ.

Для опредѣленія поверхности куба, достаточно опредѣлить площадь одной изъ его граней, повторить ее 6 разъ, тогда получимъ величину всей поверхности куба (почему?).

Черт 123.



Посмотримъ, какъ легче опредѣлить поверхность всякой призмы.

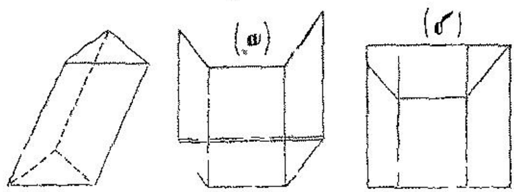
Возьмемъ модель полной трегранной прямой призмы, обернемъ ее потуже, начиная отъ какого нибудь ребра, одинъ разъ бумагой, обрѣзанной въ длину модели, а остальной лоскутъ бумаги поаккуратнѣе обрѣжемъ и ребра призмы оттиснемъ на бумагѣ. Тогда снятая бумага будетъ представлять собою боковую поверхность нашей призмы (черт. 123, б). Но развернутая бумага представляетъ собою три прямоугольника и площадь каждаго изъ нихъ равна произведенію основанія на высоту. Сумма же основаній ГА, АД и ДГ, получившихся прямоугольниковъ, составляетъ периметръ основанія призмы, а высота равна ребру призмы, слѣдовательно:

Боковая поверхность полной прямой призмы равна произведнію периметра основанія на высоту или ребро призмы.

Настоящій выводъ распространяется на всѣ прямыя четырегранныя призмы и параллелепипеды, а также и на многогранныя прямыя призмы.

Если наклонную призму обернемъ бумагою, подобно тому, какъ мы поступили съ прямою, и лоскуты бумаги тщательно обрѣжемъ со всѣхъ сторонъ, то, распахнувши бумагу въ плоскость, мы получимъ фигуру, подобную изображенной на черт. 124, а. Чтобы изъ этой фигуры получить прямоугольникъ, разрѣжемъ ее на двѣ части пер-

Черт 124.



пендикулярно ребрамъ, и нижнюю. отрѣзанную часть, приложимъ сверху, тогда нижній край отрѣзаннаго куска плотно придется къ верхнему (черт. 124, б). При внимательномъ разсмотрѣніи получившагося прямоугольника легко замѣтить, что длина его равна периметру перпендикулярнаго къ ребру разрѣза, а высота равна ребру, слѣдовательно:

Боковая поверхность наклонной призмы равна произведенію периметра, перпендикулярнаго къ ребру сѣченія, на ребро призмы.

Такой точно результатъ получимъ и тогда, когда разрѣжемъ наклонную призму перпендикулярно ребрамъ и сложимъ куски ея косыми основаніями, тогда наклонная призма перейдетъ въ прямую.

Для опредѣленія полной поверхности какой бы ни было призмы, нужно къ боковой поверхности прибавить удвоенную площадь нижняго или верхняго основаній.

Цилиндръ, какъ извѣстно, можемъ разсматривать, какъ правильную призму безчисленнаго множества граней, у которой периметръ основанія переходитъ въ окружность. Поэтому:

Боковая поверхность прямаго цилиндра равна произведенію окружности основанія на высоту или образующую линію, а

Боковая поверхность наклоннаго цилиндра равна произведенію окружности перпендикулярнаго къ оси сѣченія на образующую линію.

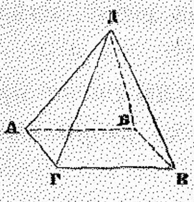
Для опредѣленія окружности перпендикулярнаго къ оси сѣченія, достаточно обхватить ниткою цилиндръ въ сказанномъ направленіи.

Чтобы получить полную поверхность цилиндра, нужно къ боковой его поверхности придать удвоенную (почему?) площадь основанія.

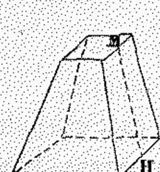
§ 42.

Для опредѣленія боковой поверхности полной правильной пирамиды ДАБВГ (черт. 125), достаточно опредѣлить площадь одной грани и повторить ее столько разъ, сколько находится всѣхъ граней въ пирамидѣ. Но площадь треугольника равна произведенію основанія на половину высоты, которая въ граняхъ пирамиды называется *апоѳемою*, слѣдовательно, сложивъ всѣ основанія граней пирамиды, что составитъ периметръ основанія, и умноживъ на половину апоѳемы, получимъ боковую поверхность правильной полной пирамиды; поэтому:

Черт. 125.



Черт. 126.



Боковая поверхность правильной полной пирамиды равна произведенію периметра основанія на половину апоѳемы.

Для опредѣленія боковой поверхности правильной пирамиды, усѣченной параллельно основанію (черт. 126), нужно опредѣлить площадь каждой изъ трапецій, служащихъ гранями усѣченной пирамидѣ. Но площадь трапеціи равна произведенію суммы параллельныхъ сторонъ на половину высоты (МН), которая въ данномъ случаѣ, въ пирамидѣ, называется апоѳемою; слѣдовательно:

Боковая поверхность правильной пирамиды, усѣченной параллельно основанію, равна произведенію суммы периметровъ основанія и параллельнаго сѣченія на половину апоѳемы.

Для опредѣленія всей поверхности пирамиды, полной или усѣченной, нужно къ боковой поверхности придать площадь основаній.

Зная, что конусъ можно разсматривать, какъ пирамиду безчисленнаго множества граней, у которой периметръ основанія переходитъ въ окружность, а апоѳема— въ образующую линію, можемъ заключить, что:

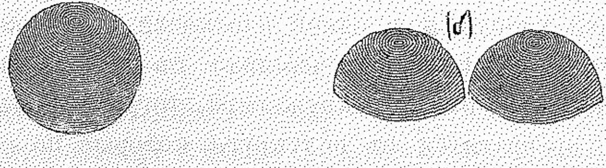
Боковая поверхность полнаго прямаго конуса равна произведенію окружности основанія на половину образующей линіи, а

Боковая поверхность конуса, усѣченнаго параллельно основанію, равна произведенію суммы окружностей основанія и параллельнаго сѣченія на половину образующей линіи. (Показать образующую линію въ усѣченномъ конусѣ.)

§ 43.

Чтобы опредѣлить, сколько пойдетъ жести на куполъ церкви, или сколько потребуется матеріи на приготовле-

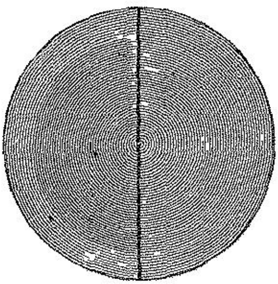
Черт. 127.



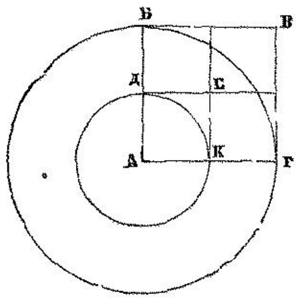
ніе извѣстныхъ размѣровъ аэростата, необходимо умѣть опредѣлять поверхность шара. Постараемся же, путемъ наглядности, уяснить себѣ способъ опредѣленія поверхности шара.

Возьмемъ приготовленный изъ дерева шаръ (черт. 127) и обтянемъ его отъ одного конца оси до другаго кольцами изъ тонкой проволоки, плотно прилегающими другъ къ другу. Кольца оставимъ неспаянными, но постараемся ихъ уложить такъ, чтобы неспаянные концы находились бы на одной дугѣ, проведенной на поверхности шара отъ верхняго конца оси до нижняго; а чтобы кольца не осыпались—прикрѣпимъ ихъ къ шару воскомъ. Сдѣлавши все это, сосчитаемъ количество всѣхъ колецъ на шарѣ и перевяжемъ ихъ ниточкой (дабы не распадались) въ два полушарія такъ, чтобы въ каждомъ изъ нихъ было бы по равному числу колецъ. Затѣмъ снимемъ верхнее и нижнее полушарія, опрокинемъ ихъ на столъ (черт. 127, б) и неспаянными концами колецъ сдвинемъ ихъ другъ къ другу; наконецъ помощью какой нибудь дощечки сдѣлаемъ на-

Черт 128



Черт. 129.



жимъ обоихъ полушарій внизъ, дабы всѣ кольца обоихъ полушарій улеглись на одной плоскости. Если же они не улягутся, то всѣ кольца, начиная съ наибольшихъ, станемъ разгибать въ полуокружности, тогда оба бывшія полушарія превратятся въ полукруги, которые по сближеніи образуютъ полный кругъ (черт. 128). Стало быть, всѣ употребленные нами пріемы привели къ тому, что поверхность шара мы замѣнили однимъ кругомъ. Теперь остается узнать, какъ велики рамѣры получившагося круга? Очевидно, что окружность его равна суммѣ двухъ самыхъ большихъ колецъ полушарій или, что все равно, дважды взятой окружности большаго круга шара; слѣдовательно, и радіусъ его равенъ дважды взятому радіусу шара или діаметру.

Итакъ, *поверхность шара измѣряется площадью такого круга, радіусъ котораго равенъ діаметру шара.*

Чтобы получить болѣе употребительный выводъ, начертимъ два концентрическихъ круга (черт. 129), изъ коихъ большій будетъ имѣть радіусомъ діаметръ шара, а меньшій радіусомъ—радіусъ шара. Построимъ на радіусахъ обоихъ куговъ по квадрату АБВГ и АДЕК. Сравнивъ между собою начерченные квадраты, мы наглядно убѣдимся, что квадратъ, построенный на радіусѣ большаго круга, вполнѣ можно замѣнить четырьмя квадратами, построенными на радіусѣ малаго круга; а изъ этого послѣдняго вывода можно заключить, что площадь большаго круга можно безъ погрѣшности замѣнить четырьмя площадями меньшаго круга. Но меньшій кругъ (изъ начерченныхъ) равенъ большому кругу шара, стало быть:

Поверхность шара равна четыремъ площадямъ своихъ большихъ круговъ, т. е.

Поверхн. шара$=4\ \pi\ р^2$.

Полагая что, р=5 вершкамъ, получимъ:

Поверх. шара $= 4 \times 3,\ 14 \times 5 \times 5 = 314$ квадр. вершковъ.

Взявъ половину этой величины, найдемъ поверхность полушара.

§ 44.

Рѣшите слѣдующія задачи:

1) Какъ велика боковая и полная поверхность куба, если ребро его равно 4 вершкамъ?

2) Во что обойдется побѣлка стѣнъ и потолка комнаты, которой длина 15 аршинъ, ширина 10 аршинъ, а высота 2 саж., если за каждую квадратную сажень просятъ по 12 коп. сер. съ матеріаломъ?

3) Чему равна боковая поверхность прямой трегранной призмы, которой стороны основанія содержатъ 5 футовъ, 4, 5 фут. и 4 фута, а высота равна 14 футамъ?

4) По данной боковой поверхности призмы и периметру основанія опредѣлить высоту призмы.

5) По данной боковой поверхности и высотѣ призмы опредѣлить периметръ ея основанія.

6) Деревянный домъ, имѣющій въ длину 8 саж., ширину 5 саж. и высоту $1^1/_2$ саж., требуется обшить тесомъ. Сколько потребуется для этого досокъ длиною въ $1^1/_2$ саж., а шириною въ 6 вершковъ?

7) Кондиторомъ заказано мастеру сдѣлать 50 коробочекъ, золоченыхъ снаружи листовымъ золотомъ. Если каждая коробочка будетъ имѣть въ длину $^1/_4$ аршина, въ ширину 2 вершка и въ вышину 1 вершокъ, то сколько потребуется книжечекъ листоваго золота, когда извѣстно что въ книжечкѣ 18 листочковъ, а каждый листочекъ имѣетъ $2^1/_2$ вершка длины и 2 вершка ширины, и что донышекъ золотить не слѣдуетъ.

8) Ведро имѣетъ форму цилиндра, коего высота равна 9 вершкамъ, а радіусъ основанія равенъ 3 вершкамъ. Сколько квадратныхъ вершковъ жести употреблено на ведро?

9) Верхушка колокольни имѣетъ форму полной правильной шестигранной пирамиды, которой каждое ребро основанія равно $^1/_2$ сажени, а апоѳема 3 сажени. Сколько потребно листовъ бѣлой жести на покрытіе верхушки колокольни, если размѣры ихъ—въ длину 12 вершковъ, а въ ширину 7 вершковъ?

10) Периметръ нижняго основанія правильной пирамиды, усѣченной параллельно основанію 24 сажени, а вер-

хняго 18 саженъ. Найти боковую поверхность пирамиды, если апоѳема равна 7 саж.?

11) Сколько желѣзныхъ листовъ длиною въ 2 арш. и шириною 1,25 арш. пойдетъ на крышу, имѣющую форму усѣченнаго конуса, котораго образующая линія равна 5 арш., діаметръ верхняго основанія 4 арш., а діаметръ нижняго 10 аршинъ?

12) На городской башнѣ, имѣющей цилиндрическую форму, нужно построить новую крышу конусообразной формы, которой (крыши) радіусъ основанія равенъ 2 саж., а ребро 5 саж. Сколько будетъ стоить означенная постройка, если листъ кровельнаго желѣза величиною въ $1^1/_2$ квадр. арш. стоитъ 80 коп.. а кровельная работа съ лѣсомъ обойдется въ 75 руб. сер.?

13) Діаметъ глобуса равенъ 8 вершкамъ. Опредѣлить чему равна его поверхность.

14) Если радіусъ шара равен 2,5 фута, то какъ велика поверхность шара?

15) Окружность большаго круга шара равна 44 дюймамъ. Вычислить поверхность шара.

16) Сколько квадратныхъ миль содержитъ въ себѣ полная поверхность земнаго шара, если извѣстно, что діаметръ его заключаетъ 1,720 географ. миль.

17) Опредѣлить, сколько квадратныхъ миль заключаетъ поверхность луны, если радіусъ ея равенъ 234 географическимъ милямъ.

III. Измѣреніе объемовъ тѣлъ.

Понятіе объ объемѣ тѣлъ.—Мѣры объемовъ.—Объемъ параллелепипеда прямаго и наклоннаго.—Объемъ трегранной и многогранной прямой и наклонной призмы.—Объемъ цилиндра и бочки.—Объемы пирамидъ и конуса.—Объемъ шара.—Объемы другихъ тѣлъ, неподходящихъ къ извѣстнымъ геометрическимъ формамъ.—Задачи.—Заключеніе.

§ 45.

Постепенныя ознакомленія и изслѣдованія надъ тѣлами геометрическими невольно приводятъ насъ къ вопросу: какъ опредѣлить вмѣстимость или объемъ геометрическаго тѣла. Многіе предметы у насъ въ общежитіи, какъ извѣстно, имѣютъ форму, подходящую часто къ формамъ геометрическихъ тѣлъ, съ которыми мы уже ознакомились. Намъ можетъ предстоять неоходимость опредѣлить, сколько пойдетъ саженъ камня или штукъ кирпича на постройку стѣны при извѣстной длинѣ, толщинѣ и высотѣ; а когда разрѣшимъ этотъ вопросъ, намъ захочется опредѣлить, сколько пойдетъ камня или кирпича на цѣлый домъ, что узнать легко, если мы разрѣшили первый вопросъ (почему?). Можетъ тоже родиться вопросъ, сколько заключается воды въ ведрѣ, колодцѣ, бассейнѣ и т. д. Поэтому, чтобы имѣть возможность удовлетворить потребности или собственному любопытству, попробуемъ измѣрить вмѣстимость или объемъ самаго простаго геометрическаго тѣла, называемаго прямоугольнымъ параллелипедомъ.

Замѣтимъ, что объемомъ или вмѣстимостью называется все пространство, заключающееся между плоскостями, ограничивающими какой нибудь многоугольникъ.

Но здѣсь рождается вопросъ: какую мѣру употребить для опредѣленія вмѣстимости прямоугольнаго параллелепипеда? Вспомнимъ, что для измѣренія площадей мы принимали за единицу мѣры такую плоскость, которая имѣла въ длину и ширину или, во всѣ четыре стороны одинаковую мѣру,—это былъ квадратъ. Теперь приходится намъ мѣрить, кромѣ длины и ширины, еще и въ высоту, стало быть, слѣдуетъ употребить такую мѣру, которой длина, ширина и высота были бы одинаковы, а такая мѣра есть кубъ; поэтому кубъ мы будемъ принимать за единицу мѣры при опредѣленіи объемовъ тѣлъ. Но ребра кубовъ могутъ быть различной длины, поэтому, если каждое ребро куба равно одной сажени, то его называютъ *саженнымъ кубомъ*, или *кубическою саженью;* если каждое изъ реберъ его равно одному аршину, то называютъ *кубическимъ аршиномъ* и т. д.

§ 46.

Чтобы уяснить себѣ способъ опредѣленія объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, рѣшимъ слѣдующую задачу:

Для склада товара, уложеннаго въ ящики величиною и формою въ 1 кубическій аршинъ, купецъ нанялъ амбаръ, который внутри имѣетъ 12 аршинъ длины, 9 арш. ширины и 5 арш. высоты. Требуется узнать сколько ящиковъ можно сложить въ нанятый амбаръ?

Рѣшеніе. По условію, длина амбара равна 12 аршинамъ, а ширина 9 арш., слѣдовательно ящиковъ, имѣющихъ величину и форму одного кубическаго аршина, уляжется на полу амбара $12\times9=108$, и эти 108 ящиковъ совершенно покроютъ полъ амбара; высота же амбара равна 5 аршинамъ, поэтому всего можно положить въ амбарѣ $108\times5=540$ ящиковъ.

(Узнайте, сколько такихъ же ящиковъ помѣстилось бы въ комнатѣ нашего класса?)

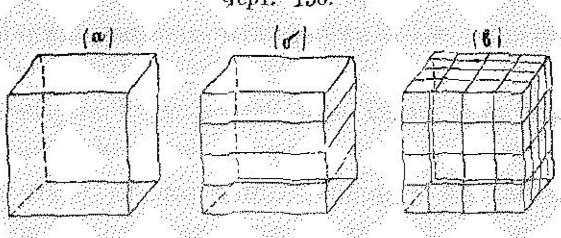
Но амбаръ и комната представляютъ собою ничто иное, какъ прямоугольный параллелепипедъ, поэтому, для опредѣленія объема прямоугольнаго параллелепипеда, нужно опредѣлить площадь его основанія и умножить на высоту

Тотъ же результатъ можно отнести и къ кубу. Получить же этотъ результатъ можно еще слѣдующимъ путемъ.

Возьмемъ приготовленный изъ цѣльнаго куска дерева кубъ (черт. 130, а), коего ребро равно $^1/_4$ аршина, т. е. 4 вершкамъ.

Раздѣливъ высоту нашего куба на вершки, разрѣжемъ его пилою параллельно основаніямъ, тогда у насъ получится четыре пласта (черт. 130, б), толщиною въ одинъ вершокъ, а площадь каждаго изъ нихъ будетъ равна $^1/_4$ квадратнаго аршина. Обозначимъ вершки по длинѣ и *ширинѣ* куба и разрѣжемъ его (черт. *130*, в), тогда каждый изъ пластовъ раздѣлится на 16 кубиковъ, изъ которыхъ каждый будетъ составлять *одинъ кубическій* вершокъ; а такъ какъ всего пластовъ имѣется 4, стало быть, всего будетъ $16 \times 4 = 64$ кубическихъ вершка въ одной кубической $^1/_4$ аршина.

Черт. 130.



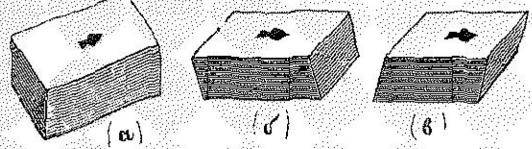
Итакъ, *объемъ прямоугольнаго параллелепипеда, а равно и куба, измѣряется произведеніемъ площади основанія на высоту.*

Если возьмемъ колоду аккуратно сложенныхъ картъ, то очевидно она будетъ представлять собою прямоугольный параллелепипедъ (черт. 131, а), объемъ котораго мы уже умѣемъ опредѣлить.

Покосимъ нашу колоду картъ въ которую нибудь сторону, тогда вмѣсто прямой колоды картъ получатся покошенныя (черт. 131, б и в) или, другими словами говоря, вмѣсто прямоугольнаго параллелепипеда получились наклонные.

Но количество картъ осталось одно и тоже, т. е. объемъ параллелепипеда (колоды картъ) остался тотъ же, потому что ни площадь основанія, ни высота параллелепипеда не измѣнились въ величинѣ,—слѣдовательно:

Черт. 131.



Объемъ наклоннаго параллелепипеда измѣряется произведеніемъ площади основанія на высоту.

(Объяснить наглядно, помощью колоды картъ, чему равняется объемъ параллелепипеда, коего основаніе параллелограмъ).

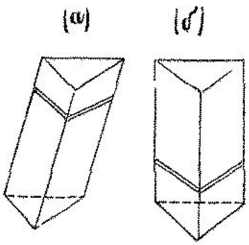
Чтобы уяснить, чѣмъ измѣряется объемъ всякой трегранной прямой призмы, вообразимъ, что въ трегранной призмѣ, представленной на черт. 132, а, ребра ВБ и ВГ раздѣлены пополамъ и чрезъ точки дѣленія *а* и *б* призма разрѣзана перпендикулярно ея основанію. Попробуемъ отрѣзанную трегранную призму приложить ребромъ аВ къ ребру аБ, какъ это изображено на чертежѣ 132, б, тогда вмѣсто трегранной призмы мы получимъ параллелепипедъ КД, равномѣрный бывшей трегранной призмѣ, потому что онъ составленъ изъ той-же призмы. Но объемъ параллелепипеда равняется произведенію *площади основанія на высоту*, стало быть и

Черт. 132.

Объемъ прямой трегранной призмы измѣряется произведенiемъ площади ея основанiя на высоту.

Посмотримъ, какъ измѣряется объемъ трегранной наклонной призмы. Для сего наклонную трегранную призму (черт 133, а) разрѣжемъ перпендикулярно ея ребрамъ на двѣ произвольныя части и верхнiй отрѣзанный кусокъ приложимъ къ основанiю нижняго: тогда, вмѣсто наклонной призмы, получимъ прямую трегранную призму (черт. 133, б) При внимательномъ разсмотрѣнiи послѣдней, легко замѣтить, что ея основанiе равно перпендикулярному къ ребру разрѣзу, а высота равна ребру наклонной призмы; но объемъ получившейся прямой трегранной призмы равномѣренъ данной наклонной (почему?), слѣдовательно:

Черт 133

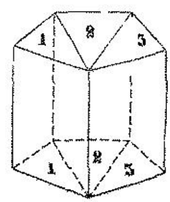


Объемъ наклонной трегранной призмы измѣряется произведенiемъ площади перпендикулярнаго къ ребру разрѣза на ребро призмы.

(Какъ опредѣлить приблизительно площадь перпендикулярнаго къ ребру разрѣза, не дѣлая сѣченiя?)

Всякую многогранную прямую призму можно дiагональными плоскостями, т. е. плоскостями, проведенными по направленiямъ дiагоналей верхняго и нижняго основанiй, разбить на трегранныя призмы, какъ это показано на черт. 134. Поэтому, для опредѣленiя объема многогранной призмы, нужно опредѣлить объемъ трегранныхъ, входящихъ въ составъ многогранной, и сумма ихъ выразитъ объемъ многогранной призмы; слѣд.:—

Черт. 134



Объемъ прямой многогранной призмы измѣряется произведенiемъ площади основанiя на высоту.

Такимъ точно образомъ можемъ найти, что:

Объемъ наклонной многогранной призмы измѣряется произведенiемъ площади перпендикулярнаго къ ребрамъ разрѣза на ребро призмы.

Мы уже видѣли, что всякiй цилиндръ можно разсматривать, какъ призму безчисленнаго множества граней. Стало быть, въ цилиндрѣ площадь основанiя замѣняется площадью круга, а высота замѣняется высотою цилиндра или образующею линiею (показать на модели); поэтому:

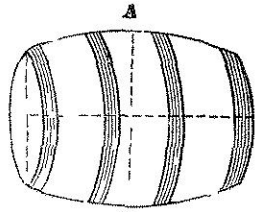
Объемъ прямаго цилиндра измѣряется произведенiемъ площади основанiя на образующую линiю.

Разсматривая наклонный цилиндръ, какъ наклонную призму безчисленнаго множества граней, мы придемъ къ заключенiю, что:

Объемъ наклоннаго цилиндра измѣряется произведенiемъ площади перпендикулярнаго сѣченiя на образующую линiю.

Задача. Опредѣлить объемъ бочки.

Черт. 135.



Такъ какъ бока бочки обыкновенно бываютъ выпуклы, то, стало быть, ее нельзя принимать за цилиндръ.

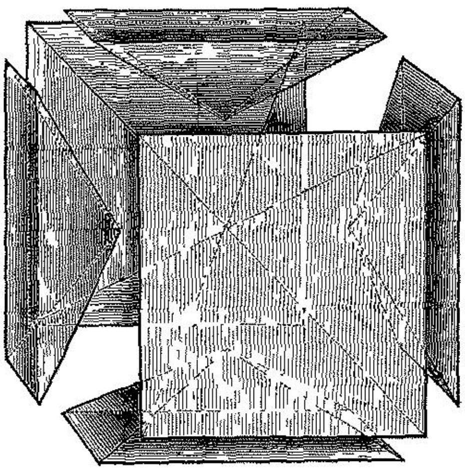
Поэтому, для опредѣленiя ея объема, поступаютъ такъ: измѣряютъ дiаметръ одного дна бочки и дiаметръ бочки въ томъ мѣстѣ, гдѣ находится средняя втулка (по направленiю АБ, черт. 135), и опредѣляютъ среднее ариѳметическое число. Такъ, напримѣръ, если дiаметръ дна бочки 4 фута, а дiаметръ у средней втулки 4 фута 4 дюйма, то среднее ариѳметическое число, а слѣдовательно и среднiй дiаметръ бочки, будетъ 4 фута 2 дюйма, радiусъ же будетъ равенъ 2 фут. 1 дюйму или 25 дюймовъ. Отсюда:

Площадь средняго по величинѣ круга бочки $=$ Пр $\times$ р,
или $3{,}14 \times 25 \times 25 = 1962{,}5$ квадр. дюйма.
Если длина бочки равна 6 фут., или 72 дюйма, то
Объемъ бочки $= 1962{,}5 \times 72 = 141300$ куб. дюйм.,
или $= 81$ куб. фут. 1232 куб. дюйм.

§ 47.

Мы видѣли, что объемъ всякаго рода призмъ опредѣляется весьма легко. Для опредѣленія объема прямоугольнаго параллелепипеда, мы рѣшили задачу, сколько помѣстится ящиковъ формою и величиною въ одинъ кубическій аршинъ въ амбарѣ при извѣстной длинѣ, ширинѣ и высотѣ его. Но не такъ легко разрѣшить вопросъ: сколько помѣстится ящиковъ формою и величиною въ одинъ кубическій аршинъ на чердакѣ, который имѣетъ видъ четырегранной пирамиды. (Можно ли уложить эти ящики такъ, чтобы подъ крышей не было пустаго мѣста?)

Черт. 136.

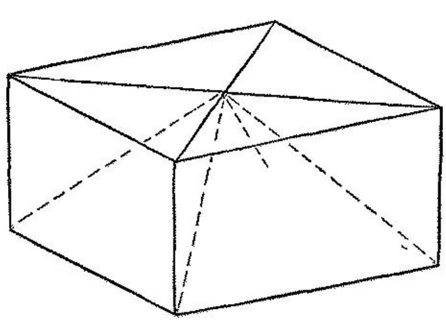


Постараемся же и теперь путемъ наглядности упростить способъ опредѣленія объема пирамидъ.

Для сего возьмемъ, приготовленную изъ цѣльнаго куска дерева, модель куба и вообразимъ, что онъ изъ центра разрѣзанъ на 6 пирамидъ (черт. 136), изъ которыхъ каждая основаніемъ своимъ имѣетъ одну изъ граней куба. Что всѣ полученныя 6 пирамидъ равны между собою, не можетъ быть никакого сомнѣнія, потому что размѣры ихъ по всѣмъ тремъ протяженіямъ совершенно одинаковы. Но объемъ куба измѣряется произведеніемъ площади основанія на высоту; а такъ какъ каждая изъ полученныхъ пирамидъ составляетъ $^1/_6$ куба, то и объемъ каждой изъ нихъ будетъ равняться произведенію площади основанія на $^1/_6$ высоты куба, или, что все равно, на $^1/_3$ высоты пирамиды, потому что высота каждой изъ пирамидъ составляетъ $^1/_2$ высоты куба.

Еще нагляднѣе будетъ этотъ выводъ, когда нашъ кубъ, раздѣленный изъ центра на 6 пирамидъ, разрѣжемъ пополамъ чрезъ его центръ плоскостью, параллельною основанію: тогда кубъ раздѣлится на два равные прямоугольные параллелепипеда и въ каждомъ изъ нихъ будетъ заключаться одна полная пирамида (черт. 137), покоющаяся на основаніи куба, и четыре малыя боковыя пирамиды, составляющія половины первой (почему?). Если получившіяся малыя пирамиды сложимъ по двѣ, тогда у насъ вмѣстѣ съ оставшеюся цѣльною пирамидою получится три совершенно

Черт 137

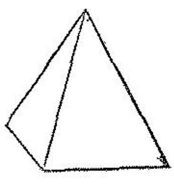


равныя пирамиды (почему?), заключенныя въ одномъ параллелепипедѣ, стало быть каждая изъ нихъ составляетъ $^1/_3$ его. Но пирамиды эти, будучи сложены такимъ образомъ, какъ представлено на чертежѣ 137, составляютъ собою прямоугольный параллелепипедъ, коего объемъ, какъ уже извѣстно, равенъ произведенію площади основанія на высоту; стало быть:

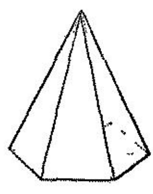
Объемъ четырегранной правильной пирамиды измѣряется произведеніемъ площади ея основанія на $^1/_3$ высоты.

Для опредѣленія объема трегранной правильной пирамиды, возьмемъ четырегранную пирамиду (черт. 138) и разрѣжемъ ее чрезъ вершину по направленію двухъ какихъ нибудь противолежащихъ реберъ, тогда она раздѣлится на двѣ совершенно равныя (почему?) трегранныя пирамиды. Но объемъ четырегранной пирамиды измѣряется произведеніемъ площади основанія на $^1/_3$ высоты,—стало быть, объемъ трегранной пирамиды измѣряется произведеніемъ половины площади основанія четырегранной пирамиды на $^1/_3$ высоты. Принимая во вниманіе, что половина площади основанія четырегранной пирамиды составляетъ основаніе трегранной пирамиды, мы можемъ заключить, что:

Черт. 138.



Черт 139



Объемъ трегранной пирамиды измѣряется произведеніемъ площади ея основанія на $^1/_3$ высоты.

Всякую многогранную пирамиду, плоскостями, проведенными чрезъ вершину ея по направленію діагоналей основанія, можно раздѣлить на трегранныя пирамиды (черт. 139). Сумма объемовъ трегранныхъ пирамидъ дастъ объемъ многогранной пирамиды. Но для опредѣленія суммы объемовъ трегранныхъ пирамидъ, входящихъ въ составъ многогранной, нужно опредѣлить сумму площадей ихъ основаній и умножить на $^1/_3$ высоты пирамиды; поэтому—

Объемъ многогранной пирамиды измѣряется прозведеніемъ площади ея основанія на $^1/_3$ высоты.

Мы уже знаемъ, что конусъ можно разсматривать, какъ правильную пирамиду безчисленнаго множества граней; поэтому, замѣнивъ термины пирамиды соотвѣтствующими терминами конуса, получимъ, что:

Объемъ конуса измѣряется произведеніемъ площади круга основанія на $^1/_3$ высоты конуса.

§ 48.

Если сапожные деревянные гвозди, имѣющіе обыкновенно видъ четырегранныхъ пирамидокъ, будемъ склеивать такъ, чтобы острія ихъ сходились бы въ одной точкѣ, то головки или, вѣрнѣе, тупые концы гвоздей мало по малу образуютъ граненую шаровидную поверхность. Понятно, чѣмъ тоньше будутъ гвоздики, тѣмъ округленнѣе будетъ шаровая поверхность.

Поэтому объемъ шара можемъ разсматривать состоящимъ изъ безчисленнаго множества небольшихъ пирамидокъ, имѣющихъ вершину въ центрѣ. Но объемъ пирамиды измѣряется произведеніемъ площади основанія на $^1/_3$ высоты, *стало быть*—объемъ всѣхъ, входящихъ въ составъ шара, пирамидъ, какъ имѣющихъ одинаковую высоту, будетъ измѣряться произведеніемъ суммы всѣхъ ихъ основаній на $^1/_3$ высоты. Принимая во вниманіе, что сумма всѣхъ основаній составляетъ поверхность шара, а $^1/_3$ высоты равна $^1/_3$ радіуса шара, мы можемъ заключить, что:

Объемъ шара измѣряется произведеніемъ его поверхности на $^1/_3$ радіуса.

Примѣръ. Если радіусъ шара$=^3/_4$ арш.$=9$ верш., то Объемъ шара$=4\times3{,}14\times9\times9\times{}^9/_3=3052{,}08$ кубич. верш.

§ 49.

Объемы многихъ тѣлъ, не подходящихъ къ извѣстнымъ намъ геометрическимъ формамъ, не могутъ быть измѣрены предложенными способами; однако объемы ихъ можно измѣрить слѣдующимъ образомъ. Положимъ, мы желаемъ опредѣлить объемъ груши. Для сего беремъ какой нибудь сосудъ, напримѣръ стаканъ, и опредѣляемъ его объемъ (какимъ образомъ?); затѣмъ опускаемъ въ стаканъ грушу и наливаемъ воды до краевъ его. Вынувъ осторожно грушу, чтобы не выхлеснулась вода, опредѣляемъ объемъ воды, оставшейся въ стаканѣ Разность между количествомъ воды въ полномъ стаканѣ и количествомъ оставшейся дастъ намъ довольно точный объемъ груши.

Если тѣло, объемъ котораго нужно опредѣлить подобнымъ путемъ, растворяется въ водѣ и всасываетъ ее, напр., сахаръ, соль, мѣлъ и т. д., то вмѣсто воды можно употребить мелкій песокъ.

(Опредѣлите такимъ образомъ объемъ яблока, сливы, яйца, куска соли, мѣлу и т. п.)

§ 50.

Рѣшите слѣдующія задачи:

1) Сколько пудъ сѣна можно свалить въ сарай. имѣющій 6 саж. длины, 4 саж. ширины и $1^1/_2$ саж. высоты, если сѣно сваливаютъ такъ, что пудъ его занимаетъ $1^1/_2$ куб. аршина?

2) Если двускатная крыша того же сарая имѣетъ въ вышину $1^1/_2$ саж., то сколько пудъ сѣна помѣстится подъ крышей при томъ же условіи?

3) Сколько нужно вынуть кубическихъ саженъ земли,

если желаютъ устроить прудъ въ 49 футовъ длины, 35 фут. ширины и 10 фут. глубины?

4) Ребро куба 4 вершка. Какъ великъ его объемъ?

5) Опредѣлите, сколько штукъ кирпича употреблено на постройку нашего училищнаго дома, если размѣры кирпича: 6 вершковъ длины, 3 вершка ширины и $1^1/_2$ верш. толщины, а при перевозкѣ и кладкѣ кирпича было $10^0/_0$ бою?

6) Сколько человѣкъ можно помѣстить въ комнатѣ длиною въ 12 арш., шириною 5 арш. и вышиною 6 арш., если на каждаго человѣка положить по $1^2/_3$ кубич. сажени воздуха?

7) Если кубическій футъ воды вѣситъ 69 фунтовъ, то сколько вѣситъ вода, находящаяся въ сосудѣ, котораго длина 5,5 фута, ширина 3,25 фута, а высота $2^1/_4$ фута?

8) Сколько будетъ вѣсить мыло, лежащее сплошною массою въ ящикѣ, котораго длина 13 фут., ширина 6 фут. и высота 4,4 фута, если кусокъ такого же мыла, имѣющій форму параллелепипеда, котораго длина 2,5 фута, ширина $1^1/_4$ фута и высота $^7/_8$ фута, вѣситъ 2 пуда 5 фунтовъ?

9) Чанъ для воды имѣетъ $2^1/_2$ аршина въ поперечникѣ и $1^3/_4$ арш. вышины. Сколько въ него войдетъ ведеръ воды, если извѣстно, что казенное ведро имѣтъ $^1/_2$ аршина въ вышину и 6 вершковъ въ поперечникѣ?

10) Цилиндрическая жестянка для сахару имѣетъ 1 футъ въ вышину и 7 дюймовъ въ поперечникѣ. Сколько войдетъ въ нее кусочковъ сахару величиною въ $^3/_4$ куб. дюйма?

11) Молоко, покупаютъ ведрами, а продаютъ кружками. Сколько будетъ прибыли на 5 ведрахъ молока, котораго ведро стоитъ 50 коп. сер., а кружку продаютъ по 3 коп., если кружка имѣетъ въ діаметрѣ 2 вершка, высота же 3 вершка?

12) Если бревно длиною въ 20 футовъ имѣетъ средній обхватъ 2,5 фута, то какъ великъ его объемъ?

13) Желѣзный листъ, изъ котораго думаютъ сдѣлать ведро, имѣетъ въ длину 18 вершковъ, а въ ширину 9 верш-

ковъ. Какъ великъ будетъ объемъ ведра, если дно его будетъ сдѣлано изъ другаго куска жести?

14) Опредѣлите объемъ трегранной пирамиды, которой высота 5 футовъ, а въ основаніи треугольникъ, имѣющій въ основаніи $6\frac{1}{2}$ футовъ, а высота равна 4 футамъ.

15) Основаніе пирамиды $17\frac{2}{3}$ квадр. фута, высота 9 футовъ. Опредѣлите объемъ пирамиды.

16) Объемъ пирамиды 336 кубич. аршинъ; площадь основанія 42 квадр. аршина. Найдите высоту пирамиды.

17) Какъ великъ объемъ шестигранной полной правильной пирамиды, въ которой высота 70 футовъ, ребро въ основаніи равно 18 футамъ, а апоѳема основанія 13 футовъ?

18) Радіусъ основанія конуса 3 фута, а высота $7\frac{1}{3}$ фута. Найдите объемъ конуса.

19) Для усыпки дорожекъ сада заготовлена куча песку, которой дали видъ прямаго конуса, коего діаметръ основанія равенъ 14 футамъ, а высота 9 футовъ. Сколько это составитъ возовъ, когда извѣстно, что на каждый возъ можно положить 10 кубич. футовъ песку?

20) Какъ великъ объемъ шара, котораго діаметръ заключаетъ 36 футовъ?

21) Окружность глобуса заключаетъ 31,4 дюйма. Опредѣлите объемъ глобуса.

22) Извѣстно, что радіусъ земли равенъ 860 географ. милямъ. Опредѣлите объемъ земли.

Все, что до сихъ поръ мы изучали, относится къ наукѣ, называемой *геометріею*. Припоминая себѣ ея полное содержаніе, мы можемъ сдѣлать слѣдующее опредѣленіе этой науки:

Наука, которая разсматриваетъ свойства всѣхъ трехъ родовъ протяженій и учитъ легкому измѣренію ихъ, называется геометріею.

Слово «геометрія» есть греческое, оно состоитъ изъ словъ γη—земля и μετρέω—мѣряю, что по соединеніи вмѣстѣ составитъ «измѣреніе земли». Первоначальное назначеніе геометріи служило къ измѣренію и раздѣленію земли на равные и по возможности правильные участки. Дальнѣйшее свое развитіе геометрія получила впослѣдствіи. Александрійскій (въ Египтѣ) философъ Эвклидъ, жившій за 280 лѣтъ до Р. Хр., первый собралъ и привелъ въ систему всѣ свѣдѣнія этой науки.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Геометрія въ полѣ.

Дачи, лежащія на ровной мѣстности и, по количеству земли въ нихъ заключающейся, не слишкомъ обширныя, можно измѣрять: 1) посредствомъ одной только цѣпи и 2) посредствомъ эккера и цѣпи.

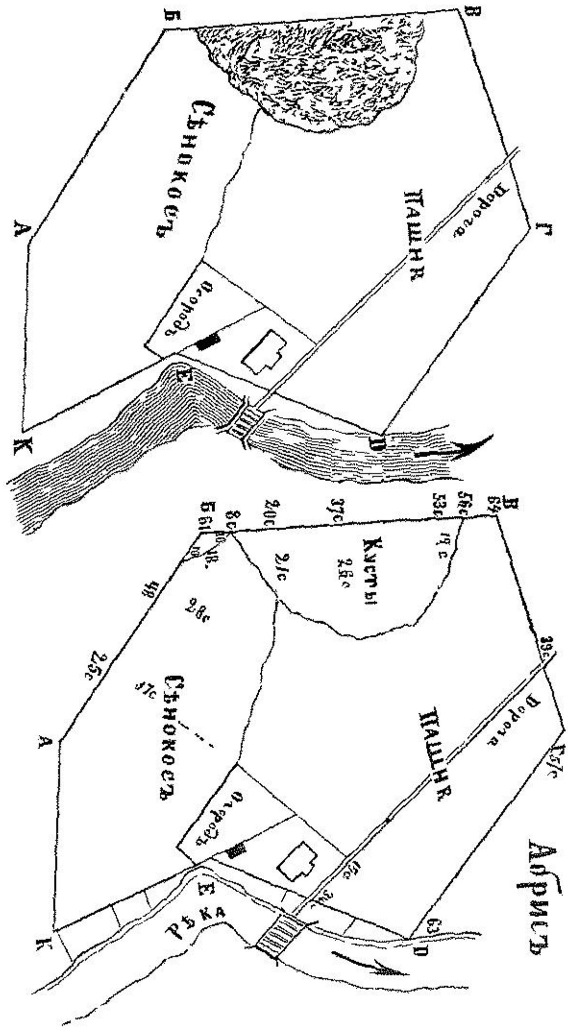
Всякая дача, въ большинствѣ случаевъ, имѣетъ форму неправильнаго многоугольника, сторонами котораго суть прямыя линіи, и лишь въ рѣдкихъ случаяхъ, напримѣръ, когда дача лежитъ при рѣкѣ,—кривыя линіи. Стало быть, чтобы снять дачу, нужно промѣрить всѣ линіи вокругъ дачи, а также и углы; но мы уже умѣемъ сдѣлать то и другое. поэтому остается лишь опредѣлить порядокъ, которому мы должны слѣдовать при съемкѣ дачи.

1) Цѣпная съемка.

Работа въ полѣ. Съемку дачи будемъ производить посредствомъ одной только цѣпи. Предположимъ, что требуется снять дачу АБВГДЕК (черт. 140). Замѣтимъ, что при съемкѣ всякой дачи необходимо вести на бумагѣ *абрисъ,* т. е. чертежъ, составленный отъ руки, на которомъ обозначается все то, что сдѣлано въ полѣ при съемкѣ.

Если углы дачи не имѣютъ какихъ нибудь естественныхъ знаковъ, то разставляютъ вѣшки.

Приступая къ съемкѣ дачи, избираютъ одну изъ вершинъ угловъ за начальный пунктъ, напримѣръ точку А,



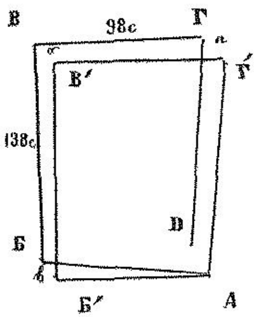
Черт. 140.

и отсюда идутъ въ такомъ направленіи, чтобы измѣряемая дача лежала во весь обходъ съ правой руки съемщика. Начавъ обходъ окружной межи съ < А, идутъ по линіи АБ и измѣряютъ ее. Для обозначенія же внутренней границы сѣнокоса возставляютъ перпендикуляры къ главнымъ изгибамъ. Вмѣстѣ съ симъ на бумагѣ проводятъ прямую АБ (см. абрисъ), приблизительно въ такомъ же направленіи, какъ и въ натурѣ, отмѣчаютъ, что къ ней прилегаетъ сѣнокосъ, что на растояніи 25 саж. отъ А возставленъ перпендикуляръ длиною 37 саж., а на 48 саж.—перпендикуляръ въ 28 саж., а также отмѣчаютъ длину всей линіи АБ. Потомъ, измѣривъ < Б (для чего откладываютъ на сторонахъ БА и БВ по 10 саж. и измѣряютъ линію растворенія угла—18 саж., см. черт. 99), идутъ по линіи БВ и отмѣчаютъ въ абрисѣ, что на 8 саж. начался кустарникъ,—на 20 саж. возставленъ перпендикуляръ длиною въ 21 саж., на 37 саж.—въ 26 саж., на 53 саж.—въ 12 саж., а на 56 саж кустарникъ кончился. Отмѣтивъ длину линіи БВ и измѣривъ извѣстнымъ уже способомъ < В, идутъ по линіи ВГ и отмѣчаютъ, что къ ней прилежитъ пашня и пересѣкаетъ дорога на 39 саж.,—шириною въ 2 саж. Дойдя до точки Г, и записавъ длину линіи ВГ, измѣряютъ < Г и идутъ по линіи ГД. Отмѣтивши длину линіи ГД, измѣряютъ < Д и идутъ по линіи ДЕ, гдѣ замѣчаютъ, что на 34 саж пересѣкаетъ дорога. Измѣривъ протяженіе усадьбы по направленію дороги, доходятъ до точки Е, отмѣчаютъ длину линіи ДЕ и измѣряютъ < Е дополненіемъ до 180^0 (какимъ образомъ?), если рѣка не позволяетъ сдѣлать непосредственнаго измѣренія. Для обозначенія же естественной границы дачи—рѣки, возставляютъ перпендикуляры, записывая длину ихъ и разстояніе между ними. Затѣмъ измѣряютъ линію ЕК, < К и наконецъ линію КА.

Работа дома. Окончивъ работу въ полѣ, дѣлаютъ накладку снятыхъ линій и угловъ на бумагу;—дѣйствіе это производится посредствомъ циркуля, линейки и карандаша—по масштабу, который предварительно чертится на той же бумагѣ, гдѣ предполагается чертить планъ снятой дачи. Соображаясь съ абрисомъ избираютъ для начальнаго пункта такую точку, чтобы снятая дача могла помѣститься на приготовленной бумагѣ. Изъ этой точки проводятъ линію въ такомъ же направленіи, какъ на абрисѣ, и по масштабу откладываютъ ея длину, потомъ, обозначивъ *на этой линіи по масштабу* 25 *и* 48 *саж.*, изъ полученныхъ точекъ возставляютъ перпендикуляры, длиною въ 37 и 28 саж.; соединивъ концы ихъ, получимъ очертаніе сѣнокоса и вмѣстѣ съ тѣмъ первый перпендикуляръ обозначитъ уголъ города (см. абрисъ). Затѣмъ, построивъ < Б (какимъ образомъ?), откладываютъ длину линіи БВ и изъ назначенныхъ на ней (циркулемъ—по масштабу) точекъ возставляютъ перпендикуляры соотвѣтственно записанной длинѣ въ абрисѣ, соединивъ концы ихъ, получимъ очертаніе границъ кустарника. Потомъ строятъ < В и откладываютъ длину линіи ВГ, а также отмѣчаютъ мѣсто. гдѣ пересѣкаетъ ее дорога; затѣмъ строятъ < Г, откладываютъ длину линіи ГД и строятъ < Д. Отложивъ длину линіи ДЕ и возставивъ перпендикуляры для обозначенія берега рѣки, обозначаютъ мѣсто пересѣченія дороги, которое, если соединимъ съ назначеннымъ уже на линіи ВГ, получимъ направленіе дороги на планѣ. По направленію дороги откладываютъ длину усадьбы, которая тогда будетъ обозначена на планѣ тремя точками (какими?). Потомъ строятъ уголъ Е (какимъ образомъ?), откладываютъ длину линіи ЕК и наконецъ строятъ < К и откладываютъ длину линіи КА.

Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что обыкновенно по нанесеніи снятыхъ границъ на бумагѣ происходитъ *невязка* или *несмыкаемость* фигуры, т. е. по наложеніи послѣдней линіи конецъ ея не сходится съ начальнымъ пунктомъ. Невязка или несмыкаемость фигуры, которая при съемкѣ цѣпью бываетъ довольно значительна, происходитъ отъ того, что посредствомъ цѣпи не возможно съ точностью измѣрить углы. Кромѣ того, при измѣренiи линiй, половины и четверти фута обыкновенно отбрасываются, а при нанесенiи линiй на бумагу часто 3 и 3¼ фута принимаются за ½ сажени. Всѣ таковыя неточности, скопившись вмѣстѣ, образуютъ невязку фигуры.

Черт. 141.



При уничтоженiи невязки фигуры предварительно опредѣляютъ, не произошло ли ошибки гдѣ нибудь въ съемкѣ;—для этого узнаютъ сколько саженъ невязки приходится на всю окружную межу, и если окажется, что на каждыя 100 саж. межи выйдетъ 1 сажень невязки, то это значитъ, что ошибки нѣтъ, а невязка произошла отъ неточности цѣпной съемки. Положимъ, что при накладкѣ на бумагу окружной межи произошла невязка ДА (черт. 141) длиною въ 4,5 сажени, тогда какъ вся окружная межа заключаетъ 447 саж.;—ясно, что невязка законная. Чтобы увязать фигуру, къ линiи ДА чрезъ вершины угловъ Г, В и Б проводятъ параллельныя, затѣмъ на линiи ГГ' откладываютъ 3,5 саж. до точки *а*, на линiи ВВ'—2,5 саж. до точки *б* и на линiи ББ'—1 саж. до точки *в*. Соединивъ точку А съ получившимися точками *а*, *б* и *в*, какъ показано на чертежѣ 141, получимъ увязанную фигуру.

Когда окружная межа увязана и внутренняя ситуацiя нанесена, тогда приступаютъ къ вычисленiю площади посредствомъ разбивки плана на треугольныя и др. фигуры.

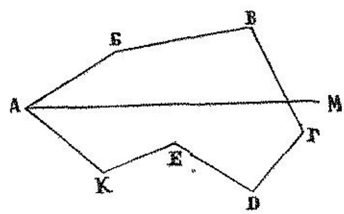
2) Эккерная съемка.

Эккерная съемка производится двоякимъ образомъ: 1) посредствомъ магистральныхъ линiй и 2) посредствомъ заключенiя снимаемой мѣстности въ прямоугольную рамку.

Первый способъ употребляется въ томъ случаѣ, когда мѣстность совершенно *открыта и ровна*, такъ что изъ средины дачи видны всѣ вѣшки, поставленныя въ вершинахъ ея угловъ.

1) **Работа въ полѣ.** Пусть снимаемая дача имѣетъ форму, подобную представленной на чертежѣ 142. Избравъ вершину какого нибудь угла за начальный пунктъ, провѣшиваютъ приблизительно по срединѣ дачи линію, которую обыкновенно называютъ *магистральною*, въ такомъ направленіи, чтобы изъ всѣхъ точекъ, взятыхъ на означенной линіи были бы видны вѣшки, поставленныя въ вершинахъ угловъ. Затѣмъ идутъ по магистральной линіи съ цѣпью, измѣряютъ ее и, вмѣстѣ съ тѣмъ, посредствомъ эккера, опускаютъ изъ вершинъ угловъ перпендикуляры на магистральную линію, отмѣчая въ абрисѣ, какъ длину перпендикуляровъ, такъ равно и разстояніе ихъ основаній отъ начала магистральной линіи (см. черт. 142). Если снимаемая мѣстность заключаетъ различныя угодія, то контуръ (очертаніе) ихъ очерчивается въ полѣ, отмѣчая протяженіе ихъ, какъ по тѣмъ перпендикулярамъ, которые проведены на означенныхъ угодіяхъ, такъ равно и по магистральной линіи.

Черт 142



Работа дома. Окончивъ означенную работу въ полѣ, приступаютъ къ накладкѣ на бумагу по масштабу. Начертивъ предварительно на бумагѣ, приготовленной для плана, мастшабъ, проводятъ магистральную линію въ такомъ направленіи, чтобы снятая дача при данномъ масштабѣ помѣстилась бы на приготовленной бумагѣ. Затѣмъ по начерченному масштабу откладываютъ на магистральной линіи отмѣченныя въ абрисѣ разстоянія и возставляютъ перпендикуляры посредствомъ циркуля, откладывая ихъ длину.

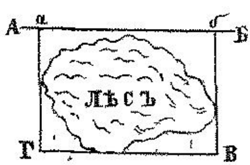
Соединивъ концы перпендикуляровъ, мы получимъ окружную межу снятаго участка земли.

Для обозначенія же контуровъ угодій, въ ней (въ межѣ) заключающихся, откладываютъ по масштабу тѣ ихъ протяженія, какія мы отмѣтили въ абрисѣ.

2) **Работа въ полѣ.** Если нужно снять на планъ такую мѣстность, по которой нельзя провести магистральной линіи напримѣръ: лѣсъ, болото, оврагъ, озеро и т. п., то снимаемую мѣстность заключаютъ въ прямоугольную рамку, которая строится помощью эккера.

Положимъ, намъ нужно опредѣлить количество земли, находящейся подъ лѣсомъ (черт. 143). Такъ какъ помощью магистральной линіи въ данномъ случаѣ съемку произвести нельзя (почему?), то по опушкѣ лѣса провѣшиваютъ прямую линію АБ; потомъ изъ какой нибудь точки *а* возставляютъ перпендикуляръ аГ, который бы тоже прошелъ по опушкѣ лѣса. Затѣмъ измѣряютъ цѣпью линію АБ и возставляютъ перпендикуляры къ главнымъ изгибамъ контура лѣса, отмѣчая какъ длину перпендикуляровъ, такъ равно и разстояніе ихъ основаній отъ точки *а*. Дойдя до точки *б*, которая служитъ основаніемъ перпендикуляру бВ, идутъ по немъ съ цѣпью измѣряютъ и возставляютъ перпендикуляры къ главнымъ изгибамъ лѣса.

Черт 143.



Затѣмъ идутъ по линіи ВГ, перпендикулярной къ бВ, и по линіи *Га*, на которыхъ производятъ тѣ же дѣйствія, какъ и на предыдущихъ двухъ.

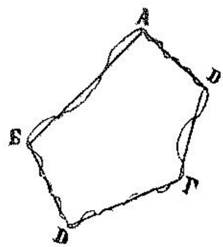
Окончивъ означенную работу въ полѣ, приступаютъ къ накладкѣ по масштабу всего того, что обозначено въ абрисѣ. (Разсказать весь ходъ накладки.)

Замѣтимъ, что если снятая фигура криволинейна, то, при вычисленіи ея площади, стараются замѣнить равномѣрною ей прямолинейною фигурою.

Положимъ, что получившаяся фигура имѣетъ форму, подобную представленной на чертежѣ 144.

Чтобы эту криволинейную фигуру замѣнить равномѣрною ей прямолинейною, проводятъ линію АБ такимъ образомъ, чтобы отрѣзанный и прирѣзанный контуръ были бы равномѣрны.

Черт. 144.



Такимъ же образомъ проводятъ прямыя БВ, ВГ, ГД и ДА, соблюдая при этомъ, чтобы оцѣнка равномѣрности отрѣзываемыхъ и прирѣзываемыхъ фигуръ, хотя производимая на глазъ, была бы вѣрна; тогда получившаяся прямолинейная фигура будетъ равномѣрна криволинейной.

Стало быть, вычисливъ площадь первой, т. е прямолинейной фигуры, что сдѣлать легко, мы получимъ площадь криволинейной фигуры.